JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

Théorème concernant les nombres premiers contenus dans une quelconque des trois formes linéaires $168\kappa + 43$, $168\kappa + 67$, $168\kappa + 163$

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 8 (1863), p. 137-140.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1863_2_8__137_0>

THÉORÈME

CONCERNANT

LES NOMBRES PREMIERS CONTENUS DANS UNE QUELCONQUE DES TROIS FORMES LINÉAIRES $168k + 43$, $168k + 67$, $168k + 163$;

Par M. J. LIOUVILLE.

Soit m un nombre premier contenu dans une quelconque des trois formes linéaires

$$168k + 43, \quad 168k + 67, \quad 168k + 163,$$

où l'on remarquera que

$$168 = 8.7.3.$$

Il est clair que m est congru à 3 (mod. 8), résidu quadratique de 7 et résidu quadratique de 3.

Le théorème que je veux communiquer ici consiste en ce que pour chacun des nombres premiers m dont il vient d'être question, l'on peut poser au moins une fois (et toujours un nombre impair de fois) l'équation suivante :

$$m = 21x^2 + 2p^{4l+1}y^2,$$

x, y étant des entiers impairs, et p un nombre premier qui ne divise pas y.

En d'autres termes, si d'un nombre premier donné m, contenu dans une quelconque des trois formes linéaires

$$168k + 43, \quad 168k + 67, \quad 168k + 163,$$

on retranche, tant que faire se peut, les entiers formant la suite

$$21.1^2, \ 21.3^2, \ 21.5^2, \ 21.7^2, \ldots,$$

il y aura un nombre impair de restes susceptibles d'être mis sous la forme canonique

$$2p^{4l+1}y^2,$$

y étant un entier (naturellement impair) et p un nombre premier, non diviseur de y. On admet, comme d'ordinaire, la valeur $l = 0$.

Nous n'imposons à priori aucune condition au nombre premier p: mais d'après ce qu'on a dit du nombre m auquel se rapporte l'équation

$$m = 21x^2 + 2p^{4l+1}y^2,$$

il est clair que l'on aura $p \equiv 3 \pmod{4}$, p résidu quadratique de 7, p non résidu quadratique de 3. Donc p ne peut appartenir qu'à une des formes linéaires

$$84g + 11, \quad 84g + 23, \quad 84g + 71;$$

et on va voir, en effet, les nombres premiers 11, 23, 71, etc., figurer comme valeurs de p dans les exemples numériques ci-après.

Les nombres premiers les plus petits que fournissent pour m les trois formes linéaires

$$168k + 43, \quad 168k + 67, \quad 168k + 163$$

sont

$$43,\ 67,\ 163,\ 211,\ 331,\ 379,\ 499,\ 547,\ 571,\ 739,\ \text{etc.}$$

Voyons comment notre théorème se vérifie sur chacun d'eux.

Pour $m = 43$, on a l'équation canonique

$$43 = 21.1^2 + 2.11.1^2;$$

pour $m = 67$ et pour $m = 163$, on a semblablement

$$67 = 21.1^2 + 2.23.1^2,$$

puis

$$163 = 21.1^2 + 2.71.1^2.$$

Pour $m = 211$, on a deux restes; d'abord

$$211 - 21.1^2 = 190 = 2.5.19,$$

ce qui ne donne pas une équation canonique, mais ensuite

$$211 - 21.3^2 = 2.11.1^2,$$

d'où l'équation canonique

$$211 = 21.3^2 + 2.11.1^2.$$

Pour chacun des trois nombres premiers

$$331,\ 379,\ 499,$$

on a de même deux restes, dont un seul est canonique. Ainsi, pour

$$m = 331,$$

il vient d'abord

$$331 - 21.1^2 = 310 = 2.5.31,$$

mais ensuite

$$331 - 21.3^2 = 2.71.1^2.$$

Pour

$$m = 379,$$

on a, d'une part

$$379 - 21.1^2 = 2.179.1^2,$$

et d'autre part

$$379 - 21.3^2 = 190 = 2.5.19.$$

Enfin, pour

$$m = 499,$$

les restes sont

$$499 - 21.1^2 = 2.239.1^2$$

et

$$499 - 21.3^2 = 310 = 2.5.31.$$

Notre théorème se vérifie également pour les nombres premiers

$$547,\ 571,\ 739;$$

pour ceux-là il y a trois restes, tous les trois canoniques.

Pour

$$m = 547,$$

ces restes sont

$$547 - 21.1^2 = 2.263.1^2,$$

puis

$$547 - 21.3^2 = 2.179.1^2,$$

enfin

$$547 - 21.5^2 = 2.11.1^2.$$

Pour

$$m = 571,$$

il vient

$$571 - 21.1^2 = 2.11.5^2,$$

puis

$$571 - 21.3^2 = 2.191.1^2,$$

enfin

$$571 - 21.5^2 = 2.23.1^2.$$

En dernier lieu, soit

$$m = 739;$$

on a

$$739 - 21.1^2 = 2.359.1^2,$$

puis

$$739 - 21.3^2 = 2.11.5^2,$$

enfin

$$739 - 21.5^2 = 2.107.1^2.$$

Je ne pense pas qu'il soit utile de pousser plus loin ces calculs; mais si loin qu'on veuille aller, notre théorème ne peut manquer d'être confirmé.