JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

Sur la forme $x^2 + 2y^2 + 4z^2 + 6t^2$

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 8 (1863), p. 134-136.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1863_2_8__134_0>

SUR LA FORME

$x^2 + 2y^2 + 4z^2 + 6t^2$;

PAR M. J. LIOUVILLE.

1. La détermination du nombre

$$N(n = x^2 + 2y^2 + 4z^2 + 6t^2)$$

des représentations d'un entier donné n, par la forme

$$x^2 + 2y^2 + 4z^2 + 6t^2,$$

n'offrira aucune difficulté à ceux qui se serviront de ce que nous venons de dire concernant les deux formes

$$x^2 + y^2 + 2z^2 + 6t^2$$

et

$$x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 3t^2.$$

En effet, on voit sans peine que, quand n est impair,

$$N(n = x^2 + 2y^2 + 4z^2 + 6t^2)$$

est précisément la moitié de

$$N(n = x^2 + y^2 + 2z^2 + 6t^2);$$

tandis que quand n est un entier pair $2q$,

$$N(n = x^2 + 2y^2 + 4z^2 + 6t^2)$$

est égal à

$$N(q = x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 3t^2).$$

2. D'après cela, posons généralement $n = 2^\alpha 3^\beta m$, m étant un en-

tier impair, non divisible par 3, et les exposants α, β pouvant se réduire à zéro. Soit en outre

$$\mathrm{N}(n = x^2 + 2y^2 + 4z^2 + 6t^2) = \mathrm{C}(\alpha, \beta, m)\sum,$$

$\sum$ (comme plus tard $\prod$) conservant la même signification que dans les articles précédents, et $\mathrm{C}(\alpha, \beta, m)$ désignant un coefficient fonction de α, β et de m, ou plutôt de m (mod. 3), dont il s'agit d'écrire la valeur. Nous y réussirons sans peine, au moyen des propositions énoncées plus haut, en distinguant les trois cas de $\alpha = 0$, $\alpha = 1$, $\alpha > 1$.

On a

$$\mathrm{C}(0, \beta, m) = \frac{1}{2}\left[3^{\beta+1} + (-1)^{\beta}\left(\frac{m}{3}\right)\right],$$

puis

$$\mathrm{C}(1, \beta, m) = 3^{\beta+1} - (-1)^{\beta}\left(\frac{m}{3}\right),$$

enfin, pour $\alpha > 1$,

$$\mathrm{C}(\alpha, \beta, m) = \left[3^{\beta+1} + (-1)^{\alpha+\beta}\left(\frac{m}{3}\right)\right]\left[2^{\alpha-1} - (-1)^{\alpha+\beta+\frac{m-1}{2}}\right].$$

Ces formules résolvent complétement la question proposée. Je n'ai pas besoin de rappeler que $\left(\frac{m}{3}\right) = 1$ ou -1 suivant que $m = 6l + 1$ ou $6l - 1$.

5. Ajoutons quelques mots relativement au nombre des représentations propres de l'entier donné $2^{\alpha}3^{\beta}m$ par la forme qui nous occupe, c'est-à-dire relativement au nombre des solutions de l'équation

$$2^{\alpha}3^{\beta}m = x^2 + 2y^2 + 4z^2 + 6t^2$$

pour lesquelles aucun facteur commun > 1 ne divise à la fois x, y, z, t.

D'abord, si l'on n'excluait que les solutions pour lesquelles x, y, z, t ont avec m un diviseur commun > 1, le nombre des solutions restantes serait

$$\mathrm{C}(\alpha, \beta, m)\prod,$$

expression qui résulte du seul changement de

$$\Sigma$$

en

$$\Pi$$

dans la formule qui donne le nombre total des solutions tant propres qu'impropres. Mais il faut aussi exclure les solutions pour lesquelles x, y, z, t ont le facteur commun 2 ou le facteur commun 3; et pour cela on doit modifier le coefficient $C(\alpha, \beta, m)$, sauf pourtant dans le cas où on aurait à la fois $\alpha < 2$ et $\beta < 2$.

Si l'on a $\alpha > 1$, mais $\beta < 2$, on remplacera $C(\alpha, \beta, m)$ par

$$C(\alpha, \beta, m) - C(\alpha - 2, \beta, m).$$

Si l'on a $\alpha < 2$, mais $\beta > 1$, on remplacera $C(\alpha, \beta, m)$ par

$$C(\alpha, \beta, m) - C(\alpha, \beta - 2, m).$$

Enfin si l'on a en même temps $\alpha > 1$ et $\beta > 1$, on remplacera $C(\alpha, \beta, m)$ par

$$C(\alpha, \beta, m) - C(\alpha - 2, \beta, m) - C(\alpha, \beta - 2, m) + C(\alpha - 2, \beta - 2, m).$$

Tout ceci dérive de principes généraux connus, et je n'insisterai pas davantage sur ce sujet.