JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

Sur la forme $x^2 + y^2 + 2z^2 + 2zt^2 + 2t^2$

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 8 (1863), p. 115-119.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1863_2_8__115_0>

SUR LA FORME

$x^2 + y^2 + 2z^2 + 2zt + 2t^2$;

PAR M. J. LIOUVILLE.

1. On demande une formule simple pour calculer à priori le nombre des représentations d'un entier donné quelconque n par la forme

$$x^2 + y^2 + 2z^2 + 2zt + 2t^2,$$

c'est-à-dire le nombre des solutions de l'équation indéterminée

$$n = x^2 + y^2 + 2z^2 + 2zt + 2t^2,$$

où x, y, z, t sont des entiers indifféremment positifs, nuls ou négatifs.

Comme la formule désirée dépend de la manière dont les nombres premiers 2 et 3 entrent dans la composition de n, nous ferons

$$n = 2^\alpha 3^\beta m,$$

m étant un entier impair non divisible par 3, et les exposants α, β pouvant se réduire à zéro. C'est donc du nombre des solutions de l'équation

$$2^\alpha 3^\beta m = x^2 + y^2 + 2z^2 + 2zt + 2t^2$$

qu'il s'agira désormais. En employant une notation de Jacobi [*], qui est souvent commode, nous désignerons ce nombre par

$$\mathrm{N}(2^\alpha 3^\beta m = x^2 + y^2 + 2z^2 + 2zt + 2t^2);$$

puis rappelant ce que nous avons dit (dans l'article précédent) au su-

[*] *Journal de Crelle*, t. XII, p. 167 : *De compositione numerorum è quatuor quadratis.*

jet du nombre

$$\mathrm{N}''(2^\alpha 3^\beta m)$$

des solutions que l'équation

$$2^\alpha 3^\beta m = x^2 + y^2 + z^2 + 3t^2$$

comporte quand on exige que $z^2 + 3t^2$ soit un entier pair, nous donnerons en deux mots la solution du problème qui nous occupe à présent : il nous suffira effectivement de poser l'équation

$$\mathrm{N}(2^\alpha 3^\beta m = x^2 + y^2 + 2z^2 + 2zt + 2t^2) = \mathrm{N}''(2^{\alpha+1} 3^\beta m).$$

On a vu que

$$\mathrm{N}''(2^\alpha 3^\beta m) = \left[3^{\beta+1} - (-1)^{\alpha+\beta}\left(\frac{m}{3}\right)\right]\left[2^\alpha + (-1)^{\alpha+\beta+\frac{m-1}{2}}\right]\sum,$$

où la simple lettre

$$\sum$$

désigne la somme

$$\sum (-1)^{\frac{\delta-1}{2}} \left(\frac{\delta}{3}\right) d$$

relative aux diviseurs conjugués d, δ de l'entier $m = d\delta$. En changeant α en $\alpha + 1$, on aura donc pour

$$\mathrm{N}''(2^{\alpha+1} 3^\beta m)$$

cette valeur

$$\left[3^{\beta+1} + (-1)^{\alpha+\beta}\left(\frac{m}{3}\right)\right]\left[2^{\alpha+1} - (-1)^{\alpha+\beta+\frac{m-1}{2}}\right]\sum.$$

qui sera aussi la valeur de

$$\mathrm{N}(2^\alpha 3^\beta m = x^2 + y^2 + 2z^2 + 2zt + 2t^2).$$

2. Si l'on se borne à considérer (comme Eisenstein l'a fait en 1847, dans le *Journal de Crelle*, t. XXXV, p. 134) des entiers impairs non divisibles par 3, c'est-à-dire si l'on se borne au cas très-particulier de $\alpha = 0$, $\beta = 0$, on trouvera pour

$$\mathrm{N}(m = x^2 + y^2 + 2z^2 + 2zt + 2t^2)$$

la valeur suivante

$$\left[3 + \left(\frac{m}{3}\right)\right]\left[2 - (-1)^{\frac{m-1}{2}}\right]\sum;$$

de sorte que si l'on considère successivement les nombres m compris dans les quatre formules linéaires qui peuvent leur convenir par rapport au module 12, il viendra pour la valeur demandée, d'abord

$$4\sum$$

si $m = 12k + 1$, puis

$$2\sum$$

si $m = 12k + 5$, mais

$$12\sum$$

si $m = 12k - 5$, enfin

$$6\sum$$

si $m = 12k - 1$; ce qui s'accorde avec les énoncés d'Eisenstein.

Nous ne croyons pas utile d'ajouter ici d'autres cas spéciaux : l'important est d'avoir donné la formule générale et surtout d'avoir bien mis en évidence par l'introduction de la fonction numérique

$$\mathrm{N}''(2^\alpha 3^\beta m)$$

le lien intime qui unit la forme

$$x^2 + y^2 + 2z^2 + 2zt + 2t^2$$

à la forme

$$x^2 + y^2 + z^2 + 3t^2.$$

Au reste

$$z^2 + 3t^2$$

et

$$2z^2 + 2zt + 2t^2$$

sont les deux formes quadratiques binaires (l'une proprement primitive, l'autre improprement primitive) qui appartiennent au déterminant -3; et c'est de là que naît, on le conçoit, la liaison que nous indiquons entre nos deux formes quaternaires.

5. Eisenstein a aussi donné (pour les entiers m impairs et non divisibles par 3) l'expression du nombre des représentations propres, par la forme

$$x^2 + y^2 + 2z^2 + 2zt + 2t^2,$$

c'est-à-dire qu'il a donné l'expression du nombre des solutions que l'équation

$$m = x^2 + y^2 + 2z^2 + 2zt + 2t^2$$

comporte quand on exclut les valeurs de x, y, z, t qui seraient divisibles par un facteur commun > 1. Alors, au lieu de la somme $\sum$, il introduit le produit

$$\prod = \left[a^\mu + (-1)^{\frac{a-1}{2}}\left(\frac{a}{3}\right)a^{\mu-1}\right]\left[b^\nu + (-1)^{\frac{b-1}{2}}\left(\frac{b}{3}\right)b^{\nu-1}\right]\cdots,$$

déjà considéré dans l'article précédent, et qui se forme au moyen des facteurs premiers $a, b, \ldots$ de l'entier $m = a^\mu b^\nu \ldots$; il laisse d'ailleurs subsister pour les quatre valeurs de $m \pmod{12}$ les coefficients numériques 4, 2, 12, 6 indiqués plus haut.

Mais s'il s'agit d'un entier quelconque

$$n = 2^\alpha 3^\beta m,$$

on n'obtiendra pas la valeur du nombre des représentations propres de n par la forme

$$x^2 + y^2 + 2z^2 + 2zt + 2t^2$$

en se contentant de changer $\sum$ en $\prod$ dans l'expression

$$\left[3^{\beta+1}+(-1)^{\alpha+\beta}\left(\frac{m}{3}\right)\right]\left[2^{\alpha+1}-(-1)^{\alpha+\beta+\frac{m-1}{2}}\right]\sum$$

du nombre total des représentations; il faut de plus, si β est >1, remplacer le facteur

$$3^{\beta+1}+(-1)^{\alpha+\beta}\left(\frac{m}{3}\right)$$

par

$$8.3^{\beta-1},$$

et de même, si α est >1, il faudra remplacer le facteur

$$2^{\alpha+1}-(-1)^{\alpha+\beta+\frac{m-1}{2}}$$

par

$$3.2^{\alpha-1}.$$

Ce n'est que quand on a à la fois $\beta<2$ et $\alpha<2$ (par exemple $\alpha=0$, $\beta=0$) que le changement de $\sum$ en $\prod$ suffit.