JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

Sur la forme $x^2 + y^2 + z^2 + 3t^2$

Journal de mathématiques pures et appliquées 2^e série, tome 8 (1863), p. 105-114.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1863_2_8__105_0>

SUR LA FORME

$$x^2 + y^2 + z^2 + 3t^2;$$

PAR M. J. LIOUVILLE.

1. Étant donné un entier quelconque n, on demande une règle simple pour calculer à priori le nombre N, ou N(n), des représentations de n par la forme

$$x^2 + y^2 + z^2 + 3t^2,$$

c'est-à-dire le nombre N(n) des solutions de l'équation indéterminée

$$n = x^2 + y^2 + z^2 + 3t^2,$$

où x, y, z, t désignent des entiers indifféremment positifs, nuls ou négatifs.

Comme les nombres premiers 2 et 3, quand ils divisent n, jouent un rôle tout spécial dans la formule qui détermine N(n), nous poserons

$$n = 2^\alpha 3^\beta m,$$

m étant un entier impair, non divisible par 3, et les exposants α, β pouvant se réduire à zéro.

Eisenstein s'est occupé en 1847 (*Journal de Crelle*, t. XXXV, p. 134) du cas particulier de $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $n = m$, c'est-à-dire du cas particulier où l'on ne considère qu'un entier impair non divisible par 3. La règle qu'il indique sans démonstration pour trouver N(m) consiste à chercher l'excès de la somme des diviseurs de m compris dans la formule $12g \pm 1$ sur la somme des diviseurs de m compris dans la formule $12g \pm 5$: on en conclut la valeur de N(m) en multipliant l'excès dont il s'agit (et qui est tantôt positif, tantôt négatif) par les facteurs numériques respectifs

$$6, \quad -12, \quad -2, \quad 4$$

suivant que m est de l'une des quatre formes linéaires

$$12k+1, \quad 12k+5, \quad 12k-5, \quad 12k-1,$$

dans lesquelles sont contenus tous les entiers impairs non divisibles par 3.

Décomposons m en deux facteurs d, δ de toutes les manières possibles, en sorte que $m = d\delta$. En employant une notation de Legendre, on a

$$(-1)^{\frac{d-1}{2}}\left(\frac{d}{3}\right) = 1$$

quand

$$d = 12g \pm 1,$$

tandis que

$$(-1)^{\frac{d-1}{2}}\left(\frac{d}{3}\right) = -1$$

quand

$$d = 12g \pm 5.$$

L'excès de la somme des diviseurs d compris dans la formule $12g \pm 1$ sur la somme des diviseurs d compris dans la formule $12g \pm 5$ s'exprime donc par la fonction numérique

$$\sum (-1)^{\frac{d-1}{2}}\left(\frac{d}{3}\right) d.$$

La règle d'Eisenstein revient dès lors aux quatre équations ci-après : pour $m = 12k+1$,

$$\mathrm{N}(m) = 6 \sum (-1)^{\frac{d-1}{2}}\left(\frac{d}{3}\right) d;$$

pour $m = 12k+5$,

$$\mathrm{N}(m) = -12 \sum (-1)^{\frac{d-1}{2}}\left(\frac{d}{3}\right) d;$$

pour $m = 12k - 5$,

$$\mathrm{N}(m) = -2\sum(-1)^{\frac{d-1}{2}}\left(\frac{d}{3}\right)d;$$

enfin, pour $m = 12k - 1$,

$$\mathrm{N}(m) = 4\sum(-1)^{\frac{d-1}{2}}\left(\frac{d}{3}\right)d.$$

On peut substituer à la fonction

$$\sum(-1)^{\frac{d-1}{2}}\left(\frac{d}{3}\right)d$$

une autre fonction numérique de même valeur absolue, mais qui a l'avantage d'exprimer toujours un nombre positif. Cette fonction nouvelle est

$$\sum(-1)^{\frac{\delta-1}{2}}\left(\frac{\delta}{3}\right)d.$$

On la trouve égale à

$$\sum(-1)^{\frac{d-1}{2}}\left(\frac{d}{3}\right)d$$

quand $m = 12k \pm 1$, vu qu'alors on a

$$(-1)^{\frac{d-1}{2}}\left(\frac{d}{3}\right) = (-1)^{\frac{\delta-1}{2}}\left(\frac{\delta}{3}\right),$$

mais égale et de signe contraire quand $m = 12k \pm 5$, attendu que dans ce dernier cas

$$(-1)^{\frac{d-1}{2}}\left(\frac{d}{3}\right) = -(-1)^{\frac{\delta-1}{2}}\left(\frac{\delta}{3}\right),$$

comme il est aisé de s'en assurer.

On peut donc poser, pour $m = 12k + 1$,

$$\mathrm{N}(m) = 6\sum(-1)^{\frac{\delta-1}{2}}\left(\frac{\delta}{3}\right)d;$$

pour $m = 12k + 5$,

$$\mathrm{N}(m) = 12 \sum (-1)^{\frac{\delta-1}{2}} \left(\frac{\delta}{3}\right) d;$$

pour $m = 12k - 5$,

$$\mathrm{N}(m) = 2 \sum (-1)^{\frac{\delta-1}{2}} \left(\frac{\delta}{3}\right) d;$$

enfin, pour $m = 12k - 1$,

$$\mathrm{N}(m) = 4 \sum (-1)^{\frac{\delta-1}{2}} \left(\frac{\delta}{3}\right) d.$$

Mais je réunis ces quatre formules en une seule, en écrivant

$$\mathrm{N}(m) = \left[3 - \left(\frac{m}{3}\right)\right] \left[2 + (-1)^{\frac{m-1}{2}}\right] \sum,$$

où, pour abréger, je mets simplement $\sum$, au lieu de

$$\sum (-1)^{\frac{\delta-1}{2}} \left(\frac{\delta}{3}\right) d.$$

2. La règle d'Eisenstein ne s'appliquant ni aux entiers impairs multiples de 3, ni aux entiers pairs premiers à 3, ni à fortiori aux entiers pairs et multiples de 3, nous avons dû non-seulement constater au moyen de nos *formules générales* l'exactitude de ses énoncés, mais aussi en chercher d'autres pour les cas qu'il a omis et qui ont leurs difficultés propres.

Qu'il s'agisse d'abord d'un entier n impair, mais multiple de 3, et soit

$$n = 3^\beta m,$$

l'entier m étant premier à 3. Continuons à désigner par la simple lettre $\sum$ la fonction numérique de m employée plus haut. Nous aurons

$$\mathrm{N}(3^\beta m) = \left[3^{\beta+1} - (-1)^\beta \left(\frac{m}{3}\right)\right] \left[2 + (-1)^{\beta + \frac{m-1}{2}}\right] \sum.$$

Cette formule convient même au cas de $\beta = 0$: elle redonne alors la valeur de $N(m)$ inscrite à la fin du n° **1**.

Pour $\beta = 1$, et en distinguant les quatre formes linéaires dont m est susceptible relativement au module 12, on a les équations spéciales que voici : quand $m = 12k + 1$,

$$N(3m) = 10 \sum;$$

quand $m = 12k + 5$,

$$N(3m) = 8 \sum;$$

quand $m = 12k - 5$,

$$N(3m) = 30 \sum;$$

enfin, quand $m = 12k - 1$,

$$N(3m) = 24 \sum.$$

Passons aux entiers n non divisibles par 3, mais pairs, de façon que

$$n = 2^\alpha m,$$

m étant impair et premier à 3. En conservant à $\sum$ sa signification, je trouve cette fois

$$N(2^\alpha m) = \left[3 - (-1)^\alpha \left(\frac{m}{3}\right)\right] \left[2^{\alpha+1} + (-1)^{\alpha + \frac{m-1}{2}}\right] \sum.$$

En prenant $\alpha = 0$, on retrouverait la valeur déjà donnée de $N(m)$.

En prenant $\alpha = 1$, on a, pour $m = 12k + 1$,

$$N(2m) = 12 \sum;$$

pour $m = 12k + 5$,

$$N(2m) = 6 \sum;$$

pour $m = 12k - 5$,

$$N(2m) = 20 \sum;$$

pour $m = 12k - 1$,

$$N(2m) = 10\sum.$$

Considérons enfin un entier quelconque n mis sous la forme

$$n = 2^{\alpha}3^{\beta}m,$$

m étant impair et premier à 3. Pour avoir

$$N(2^{\alpha}3^{\beta}m),$$

on cherchera encore la fonction de m désignée par $\sum$, puis on la multipliera par le produit des deux facteurs

$$3^{\beta+1} - (-1)^{\alpha+\beta}\left(\frac{m}{3}\right)$$

et

$$2^{\alpha+1} + (-1)^{\alpha+\beta+\frac{m-1}{2}}$$

qui dépendent à la fois de m et des exposants α, β. En d'autres termes

$$N(2^{\alpha}3^{\beta}m) = \left[3^{\beta+1} - (-1)^{\alpha+\beta}\left(\frac{m}{3}\right)\right]\left[2^{\alpha+1} + (-1)^{\alpha+\beta+\frac{m-1}{2}}\right]\sum.$$

Cette formule remarquable est absolument générale et l'on peut y attribuer aux exposants α, β toutes les valeurs possibles, même la valeur zéro.

5. On voit que la fonction numérique de m marquée par la lettre

$$\sum$$

et définie, au moyen des facteurs conjugués d, δ de m, par la somme

$$\sum(-1)^{\frac{\delta-1}{2}}\left(\frac{\delta}{3}\right)d,$$

joue dans la valeur de

$$N(2^{\alpha}3^{\beta}m)$$

le rôle le plus considérable, quoique d'autres éléments y aient aussi de l'influence.

En donnant avec Jacobi une extension utile au symbole de Legendre qui figure dans nos formules, on peut écrire

$$(-1)^{\frac{\delta-1}{2}}\left(\frac{\delta}{3}\right)=\left(\frac{3}{\delta}\right),$$

et la fonction $\sum$ devient

$$\sum\left(\frac{3}{\delta}\right)d.$$

Cette forme est celle qu'on doit préférer pour mettre en évidence certaines analogies; mais dans l'usage ordinaire elle est moins commode.

La somme $\sum$ peut s'exprimer par un produit. Il est aisé de s'assurer en effet que si a, b,... désignent les facteurs premiers distincts de m, en sorte que

$$m=a^{\mu}b^{\nu}\ldots,$$

la valeur de $\sum$ sera celle du produit des facteurs ci-après

$$\begin{array}{l}
a^{\mu}+(-1)^{\frac{a-1}{2}}\left(\frac{a}{3}\right)a^{\mu-1}+a^{\mu-2}+(-1)^{\frac{a-1}{2}}\left(\frac{a}{3}\right)a^{\mu-3}+\ldots,\\
b^{\nu}+(-1)^{\frac{b-1}{2}}\left(\frac{b}{3}\right)b^{\nu-1}+b^{\nu-2}+(-1)^{\frac{b-1}{2}}\left(\frac{b}{3}\right)b^{\nu-3}+\ldots,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}$$

ou, ce qui revient au même, des facteurs

$$\begin{array}{l}
a^{\mu}+\left(\frac{3}{a}\right)a^{\mu-1}+a^{\mu-2}+\left(\frac{3}{a}\right)a^{\mu-3}+\ldots,\\
b^{\nu}+\left(\frac{3}{b}\right)b^{\nu-1}+b^{\nu-2}+\left(\frac{3}{b}\right)b^{\nu-3}+\ldots,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;
\end{array}$$

on voit par là que la valeur de $\sum$ est essentiellement >0. Pour

$m = 1, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 25$, etc., les valeurs respectives de $\sum$ sont $1, 4, 6, 12, 14, 16, 18, 24, 21$, etc.

4. La formule générale donnée pour

$$\mathrm{N}\,(2^\alpha 3^\beta m)$$

résout complétement la question que nous nous étions proposée. Mais nous ajouterons une remarque utile en décomposant la valeur totale de

$$\mathrm{N}\,(2^\alpha 3^\beta m)$$

en deux parties séparées

$$\mathrm{N}'\,(2^\alpha 3^\beta m), \quad \mathrm{N}''\,(2^\alpha 3^\beta m),$$

dont elle sera la somme, et qui exprimeront les nombres de solutions de l'équation indéterminée

$$2^\alpha 3^\beta m = x^2 + y^2 + z^2 + 3t^2$$

pour les deux cas distincts de $z^2 + 3t^2$ entier impair et de $z^2 + 3t^2$ entier pair.

On a en effet pour $z^2 + 3t^2$ impair

$$\mathrm{N}'\,(2^\alpha 3^\beta m) = 2^\alpha \left[3^{\beta+1} - (-1)^{\alpha+\beta}\left(\frac{m}{3}\right)\right]\sum$$

et pour $z^2 + 3t^2$ pair

$$\mathrm{N}''\,(2^\alpha 3^\beta m) = \left[3^{\beta+1} - (-1)^{\alpha+\beta}\left(\frac{m}{3}\right)\right]\left[2^\alpha + (-1)^{\alpha+\beta+\frac{m-1}{2}}\right]\sum,$$

formules desquelles résultent de nombreuses conséquences.

Je supprime, pour le moment, d'autres remarques d'une importance égale, qui pourront trouver leur place ailleurs.

5. Nous avons déterminé le nombre total

$$\mathrm{N}\,(2^\alpha 3^\beta m)$$

des solutions tant propres qu'impropres de l'équation

$$2^\alpha 3^\beta m = x^2 + y^2 + z^2 + 3t^2,$$

savoir

$$\mathrm{N}(2^\alpha 3^\beta m) = \left[3^{\beta+1} - (-1)^{\alpha+\beta}\left(\frac{m}{3}\right)\right]\left[2^{\alpha+1} + (-1)^{\alpha+\beta+\frac{m-1}{2}}\right]\sum.$$

Mais on peut demander à part le nombre

$$\mathrm{M}(2^\alpha 3^\beta m)$$

des solutions propres, c'est-à-dire des solutions pour lesquelles aucun facteur > 1 ne divise à la fois x, y, z, t. Pour cela, considérons l'entier m décomposé en facteurs premiers sous la forme

$$m = a^\mu b^\nu \ldots,$$

puis formons le produit

$$\prod\left[a^\mu + (-1)^{\frac{a-1}{2}}\left(\frac{a}{3}\right)a^{\mu-1}\right]$$

dont les facteurs successifs sont

$$a^\mu + (-1)^{\frac{a-1}{2}}\left(\frac{a}{3}\right)a^{\mu-1},\quad b^\nu + (-1)^{\frac{b-1}{2}}b^{\nu-1},\ldots,$$

et que je désignerai par la simple lettre

$$\prod.$$

On passera de la valeur de $\mathrm{N}(2^\alpha 3^\beta m)$ à celle de $\mathrm{M}(2^\alpha 3^\beta m)$ en remplaçant d'abord $\sum$ par $\prod$, mais de plus, si β est > 1, en remplaçant le facteur

$$3^{\beta+1} - (-1)^{\alpha+\beta}\left(\frac{m}{3}\right)$$

par

$$8.3^{\beta-1},$$

et, si α est > 1, le facteur

$$2^{\alpha+1} + (-1)^{\alpha+\beta+\frac{m-1}{2}}$$

par

$$3.2^{\alpha-1}.$$

Cette règle s'accorde avec celle qu'Eisenstein a donnée pour le cas particulier de $\alpha = 0$, $\beta = 0$, le seul dont il se soit occupé : il suffit alors de changer $\sum$ en $\prod$.

Je remarquerai en terminant que si l'on représente le produit $\prod$ par $P(m)$ et la somme $\sum$ par $Q(m)$, on aura

$$Q(m) = P\left(\frac{m}{1^2}\right) + \ldots + P\left(\frac{m}{D^2}\right) + \ldots,$$

D représentant les diviseurs de m dont le carré D^2 divise aussi m, ce qui arrive toujours pour $D = 1$ par exemple.