JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

Nouveau théorème concernant le quadruple d'un nombre premier de la forme $12\kappa + 5$

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 8 (1863), p. 102-104.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1863_2_8__102_0>

NOUVEAU THÉORÈME

CONCERNANT

LE QUADRUPLE D'UN NOMBRE PREMIER DE LA FORME $12k+5$;

Par M. J. LIOUVILLE.

On pourra joindre ce théorème à ceux que nous avons donnés dans le cahier de mars 1861, page 93. Voici en quoi il consiste :

Soit m un nombre premier donné, de la forme $12k + 5$. Je dis que son quadruple $4m$ vérifiera au moins une fois (et toujours un nombre impair de fois) l'équation

$$4m = 3x^2 + p^{4l+1}y^2,$$

où x, y sont des entiers impairs et p un nombre premier non diviseur de y. Comme d'ordinaire, nous admettons pour l la valeur zéro.

Cet énoncé n'impose au nombre premier p aucune condition; mais par la nature même du nombre donné m, l'équation

$$4m = 3x^2 + p^{4l+1}y^2$$

entraîne les deux congruences

$$p \equiv 1 \pmod{8}, \qquad p \equiv 2 \pmod{3}.$$

Ainsi p ne peut être que de la forme $24g + 17$.

On présentera notre théorème sous un point de vue plus commode en disant que si du quadruple $4m$ d'un nombre premier donné, de la forme $12k + 5$, on retranche tant que faire se peut les entiers

$$3.1^2,\ 3.3^2,\ 3.5^2,\ 3.7^2,\ldots,$$

il y aura un nombre impair de restes susceptibles d'être mis sous la forme

$$p^{4l+1}y^2,$$

p étant un nombre premier $(24g+17)$ qui ne divise pas y.

Les nombres premiers de la forme $12k+5$ forment la suite

$$5,\ 17,\ 29,\ 41,\ 53,\ 89,\ 101,\ 113,\ldots;$$

vérifions notre théorème sur quelques-uns de ces nombres.

Pour $m=5$ (d'où $4m=20$), on n'a qu'un seul reste

$$20-3.1^2=17.1^2;$$

mais ce reste a, comme il le faut, la forme canonique.

Pour $m=17$ (d'où $4m=68$), il vient d'abord

$$68-3.1^2=65=5.13,$$

ce qui ne fournit pas un reste canonique; mais le reste suivant

$$68-3.3^2=41.1^2$$

a la forme voulue, et le théorème subsiste.

Pour $m=29$, $4m=116$, les trois restes qu'on trouve sont canoniques :

$$\begin{aligned}116-3.1^2&=113.1^2,\\116-3.3^2&=89.1^2,\\116-3.5^2&=41.1^2.\end{aligned}$$

Pour $m=41$, $4m=164$, on a aussi trois restes canoniques

$$\begin{aligned}164-3.3^2&=137.1^2,\\164-3.5^2&=89.1^2,\\164-3.7^2&=17.1^2,\end{aligned}$$

plus un reste non canonique qui est

$$164-3.1^2=161=7.23.$$

Enfin on a également trois restes canoniques pour

$$m = 89$$

et pour

$$m = 101,$$

savoir, d'une part,

$$\begin{aligned} 4.\ 89 - 3.1^2 &= 353.1^2, \\ 4.\ 89 - 3.5^2 &= 281.1^2, \\ 4.\ 89 - 3.9^2 &= 113.1^2, \end{aligned}$$

et, d'autre part,

$$\begin{aligned} 4.101 - 3.1^2 &= 401.1^2, \\ 4.101 - 3.7^2 &= 257.1^2, \\ 4.101 - 3.11^2 &= 41.1^2. \end{aligned}$$

Je me dispense d'écrire les restes non canoniques et je ne pousserai pas plus loin ces calculs. On peut être assuré que toujours notre théorème serait vérifié.