JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

Sur la forme $x^2 + y^2 + 2z^2 + 4t^2$

Journal de mathématiques pures et appliquées 2^e série, tome 7 (1862), p. 99-102.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1862_2_7__99_0>

SUR LA FORME

$$x^2 + y^2 + 2z^2 + 4t^2;$$

PAR M. J. LIOUVILLE.

1. Étant donné un entier n pair ou impair (que nous représenterons par $2^\alpha m$, m étant impair et l'exposant α pouvant se réduire à zéro), on demande le nombre N des représentations propres ou impropres de n par la forme

$$x^2 + y^2 + 2z^2 + 4t^2,$$

et aussi le nombre M des seules représentations propres. Or il arrive ici (comme dans d'autres cas déjà traités) que N dépend de la fonction numérique $\omega_1(m)$ définie, au moyen des diviseurs conjugués d, δ de l'entier impair $m = d\delta$, par la formule

$$\omega_1(m) = \sum (-1)^{\frac{\delta^2-1}{8}} d,$$

tandis que M se déduit de la fonction $O_1(m)$ exprimée par le produit

$$\prod \left[p^\mu + (-1)^{\frac{p^2-1}{8}} p^{\mu-1}\right],$$

où p est un facteur premier quelconque de m, μ le nombre de fois que p divise m. Pour $m = 1$, on fait naturellement $O_1(m) = 1$.

2. Soit d'abord n impair, $n = m$. Je trouve que l'on a alors

$$N = 4\omega_1(m)$$

et

$$M = 4O_1(m),$$

quelle que soit la forme linéaire de m.

Au contraire, pour n pair, $n = 2^\alpha m$, $\alpha > 0$, l'on a

$$N = 2(2^{\alpha+1} - 1)\,\omega_1(m)$$

si $m = 8k \pm 1$, mais

$$N = 2(2^{\alpha+1} + 1)\,\omega_1(m)$$

si $m = 8k \pm 3$. La forme linéaire de m influe donc cette fois sur N. Elle influe également sur M lorsque $\alpha = 1$ ou 2, mais non pour $\alpha > 2$.

Quand $\alpha = 1$, c'est-à-dire quand n est impairement pair, $n = 2m$, il vient

$$M = 6O_1(m)$$

si $m = 8k \pm 1$, mais

$$M = 10O_1(m)$$

si $m = 8k \pm 3$.

Quand $\alpha = 2$, c'est-à-dire quand n est divisible par 4, non par 8, $n = 4m$, on a

$$M = 10O_1(m)$$

si $m = 8k \pm 1$, mais

$$M = 14O_1(m)$$

si $m = 8k \pm 3$.

Enfin pour $\alpha > 2$, on retrouve une formule unique :

$$M = 3.2^\alpha O_1(m).$$

3. Soit, comme premier exemple, $n = m = 9$. On aura, par nos formules,

$$N = 4\omega_1(9) = 28$$

et

$$M = 4O_1(m) = 24.$$

Or, par les équations

$$9 = (\pm 1)^2 + (\pm 2)^2 + 2.0^2 + 4(\pm 1)^2,$$
$$9 = (\pm 2)^2 + (\pm 1)^2 + 2.0^2 + 4(\pm 1)^2,$$
$$9 = (\pm 1)^2 + 0^2 + 2(\pm 2)^2 + 4.0^2,$$
$$9 = 0^2 + (\pm 1)^2 + 2(\pm 2)^2 + 4.0^2,$$

nous avons en effet vingt-quatre représentations propres du nombre 9, à quoi viennent s'adjoindre quatre représentations impropres, puisque l'on a

$$9 = (\pm 3)^2 + 0^2 + 2.0^2 + 4.0^2$$

et

$$9 = 0^2 + (\pm 3)^2 + 2.0^2 + 4.0^2.$$

Soit à présent $n = 4 = 2^2.1$, d'où $m = 1$, $\alpha = 2$. Le nombre 1 appartient à la forme linéaire $8k + 1$, et l'on a

$$\omega_1(1) = 1, \quad \mathrm{O}_1(1) = 1.$$

Nos formules donneront donc ici :

$$\mathrm{N} = 2(2^3 - 1) = 14$$

et

$$\mathrm{M} = 10.$$

Or, par les équations

$$4 = (\pm 1)^2 + (\pm 1)^2 + 2(\pm 1)^2 + 4.0^2,$$
$$4 = 0^2 + 0^2 + 2.0^2 + 4(\pm 1)^2,$$

nous avons d'abord dix représentations propres, puis par les équations

$$4 = (\pm 2)^2 + 0^2 + 2.0^2 + 4.0^2,$$
$$4 = 0^2 + (\pm 2)^2 + 2.0^2 + 4.0^2,$$

quatre représentations impropres, qui complètent le nombre 14.

Soit enfin $n = 20 = 2^2.5$. Comme 5 est de la forme $8k - 3$, nos formules donneront cette fois

$$N = 2(2^3 + 1)\,\omega_1(5) = 72$$

et

$$M = 14\,O_1(5) = 56.$$

Or c'est ce que confirment les deux groupes de décompositions :

$$20 = 3^2 + 3^2 + 2.1^2 + 4.0^2,$$
$$20 = 1^2 + 1^2 + 2.3^2 + 4.0^2,$$
$$20 = 4^2 + 0^2 + 2.0^2 + 4.1^2,$$
$$20 = 2^2 + 2^2 + 2.2^2 + 4.1^2,$$
$$20 = 1^2 + 1^2 + 2.1^2 + 4.2^2,$$

et

$$20 = 2^2 + 4^2 + 2.0^2 + 4.0^2,$$
$$20 = 2^2 + 0^2 + 2.0^2 + 4.2^2,$$

si l'on a soin d'y marquer du double signe les racines des carrés qui ne sont pas nuls et d'y effectuer les permutations convenables.