JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

Sur la forme $x^2 + 8y^2 + 16z^2 + 16t^2$

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 7 (1862), p. 69-72.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1862_2_7__69_0>

gallica NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Gallica de la Bibliothèque nationale de France
http://gallica.bnf.fr/

et catalogué par Mathdoc dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc
http://www.numdam.org/journals/JMPA

SUR LA FORME

$$x^2 + 8y^2 + 16z^2 + 16t^2;$$

PAR M. J. **LIOUVILLE**.

---

1. Étant donné un entier n pair ou impair (que nous représenterons par $2^\alpha m$ (m étant impair et l'exposant α pouvant se réduire à zéro), on demande le nombre N des représentations de n par la forme

$$x^2 + 8y^2 + 16z^2 + 16t^2,$$

c'est-à-dire le nombre N des solutions de l'équation

$$n = x^2 + 8y^2 + 16z^2 + 16t^2,$$

où x, y, z, t sont des entiers indifféremment positifs, nuls ou négatifs.

Le cas de n impair, $n = m$, est le plus intéressant. Pour les nombres de l'une des trois formes $8k + 3$, $8k - 3$, $8k - 1$, on a évidemment $N = 0$. Mais le cas de

$$n = m = 8k + 1$$

est très-curieux. Il faut considérer d'une part la fonction numérique $\omega_1(m)$ définie, au moyen des facteurs conjugués d, δ de l'entier $m = d\delta$, par l'équation

$$\omega_1(m) = \sum (-1)^{\frac{\delta^2 - 1}{8}} d,$$

et d'autre part la somme

$$\sum (-1)^{\frac{r-1}{2}} r$$

relative aux entiers r impairs et positifs qui peuvent figurer dans l'équation

$$m = r^2 + 2u^2,$$

où l'entier u (qui sera pair ici, puisque $m = 8k + 1$) doit être pris, quand il n'est pas nul, avec le double signe $\pm$. Cela posé, on a

$$\mathrm{N} = \omega_1(m) + \sum (-1)^{\frac{r-1}{2}} r.$$

Soit, par exemple, $m = 1 = 1^2 + 2.0^2$; par suite

$$\omega_1(m) = 1, \quad \sum (-1)^{\frac{r-1}{2}} . r = 1.$$

Notre formule donnera

$$\mathrm{N} = 2,$$

ce que confirme l'équation

$$1 = (\pm 1)^2 + 8.0^2 + 16.0^2 + 16.0^2$$

qui fournit en effet deux représentations.

Soit, en second lieu, $m = 9$. On a $\omega(9) = 7$. De plus les équations

$$9 = 3^2 + 2.0^2, \quad 9 = 1^2 + 2(\pm 2)^2$$

donnent trois valeurs de r, l'une égale à 3, les deux autres égales à 1. Donc

$$\mathrm{N} = 7 - 3 + 2 = 6.$$

Or le nombre 9 a en effet six représentations contenues dans les équations

$$9 = (\pm 3)^2 + 8.0^2 + 16.0^2 + 16.0^2,$$
$$9 = (\pm 1)^2 + 8(\pm 1)^2 + 16.0^2 + 16.0^2.$$

Soit encore $m = 17 = 3^2 + 2(\pm 2)^2$. Alors

$$\mathrm{N} = 18 - 2.3 = 12:$$

cette valeur de N s'accorde avec les équations

$$17 = (\pm 1)^2 + 8.0^2 + 16(\pm 1)^2 + 16.0^2,$$
$$17 = (\pm 3)^2 + 2(\pm 2) + 16.0^2 + 16.0^2,$$

dans la première desquelles on peut permuter les deux derniers termes.

Soit enfin $m = 25 = 5^2 + 2.0^2$. Il viendra

$$N = 21 + 5 = 26.$$

Or cette valeur de N est vérifiée par les trois équations

$$25 = 5^2 + 8.0^2 + 16.0^2 + 16.0^2,$$
$$25 = 1^2 + 8.1^2 + 16.1^2 + 16.0^2,$$
$$25 = 3^2 + 8.0^2 + 16.1^2 + 16.0^2,$$

en y affectant du double signe les racines des carrés qui ne sont pas nuls et en opérant les permutations convenables.

2. Soit à présent n pair, $n = 2^\alpha m$, $\alpha > 0$. Il est clair que dans l'équation

$$2^\alpha m = x^2 + 8y^2 + 16z^2 + 16t^2,$$

le premier carré devra être pair, partant divisible par 4. Si donc on a $\alpha = 1$, $n = 2m$, l'équation sera impossible, de sorte qu'alors

$$N = 0.$$

Mais si n est pairement pair, $\alpha > 1$, alors en posant $x = 2x_1$ et divisant par 4, on trouvera

$$2^{\alpha-2} m = x_1^2 + 2y^2 + 4z^2 + 4t^2,$$

ce qui nous ramène à une forme dont nous nous sommes occupés dans ce cahier même.

Il en résulte pour le nombre N des représentations d'un entier n

pairement pair, par la forme actuelle

$$x^2 + 8y^2 + 16z^2 + 16t^2,$$

les résultats suivants :

1° Soit n divisible par 4, non par 8, $n = 4m$. Alors

$$N = 2\omega_1(m),$$

quelle que soit la forme linéaire de m. Ainsi l'entier 4 a deux représentations fournies par l'équation

$$4 = (\pm 2) + 8.0^2 + 16.0^2 + 16.0^2,$$

et l'entier 12 en a quatre contenues dans la formule

$$12 = (\pm 2)^2 + 8(\pm 1)^2 + 16.0^2 + 16.0^2.$$

2°. Soit n divisible par 8, $n = 2^\alpha m$, $\alpha > 2$. On aura

$$N = 2(2^{\alpha-2} - 1)\,\omega_1(m)$$

si $m = 8k \pm 1$, mais

$$N = 2(2^{\alpha-2} + 1)\,\omega_1(m)$$

si $m = 8k \pm 3$.

Ainsi l'entier 8 a deux représentations fournies par la formule

$$8 = 0^2 + 8(\pm 1)^2 + 16.0^2 + 16.0^2;$$

et l'entier 24 en a douze, contenues dans les équations que voici :

$$24 = 0^2 + 8(\pm 1)^2 + 16(\pm 1)^2 + 16.0^2,$$
$$24 = 0^2 + 8(\pm 1)^2 + 16.0^2 + 16(\pm 1)^2,$$
$$24 = (\pm 4)^2 + 8(\pm 1)^2 + 16.0^2 + 16.0^2.$$