JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

Sur la forme $x^2 + 2y^2 + 8z^2 + 8t^2$

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 7 (1862), p. 65-68.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1862_2_7__65_0>

gallica NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Gallica de la Bibliothèque nationale de France
http://gallica.bnf.fr/

et catalogué par Mathdoc dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc
http://www.numdam.org/journals/JMPA

SUR LA FORME

$x^2 + 2y^2 + 8z^2 + 8t^2$;

PAR M. J. LIOUVILLE.

1. On demande le nombre N des représentations d'un entier quelconque n (ou $2^\alpha m$, m impair, $\alpha = 0, 1, 2,\ldots$) par la forme

$$x^2 + 2y^2 + 8z^2 + 8t^2;$$

et c'est encore de la fonction $\omega_1(m)$, employée dans l'article précédent, que tout va dépendre.

Et d'abord pour n impair, $n = m$, on a évidemment $\mathrm{N} = 0$, quand m est de l'une des deux formes $8k-1$, $8k-3$; mais

$$\mathrm{N} = 2\omega_1(m)$$

quand m est de la forme $8k+1$ ou de la forme $8k+3$.

Soit, par exemple, $m = 1$. On aura $\mathrm{N} = 2$, conformément à la double équation

$$1 = (\pm 1)^2 + 2.0^2 + 8.0^2 + 8.0^2.$$

Soit ensuite $m = 3$. Notre formule donnera

$$\mathrm{N} = 2.2 = 4.$$

L'équation

$$3 = (\pm 1)^2 + 2(\pm 1)^2 + 8.0^2 + 8.0^2$$

confirme ce fait.

Soit encore $m = 9$. On aura

$$\mathrm{N} = 2.7 = 14.$$

Or l'entier 9 a en effet quatorze représentations que fournissent les équations ci-après :

$$9 = (\pm 1)^2 + 2.0^2 + 8(\pm 1)^2 + 8.0^2,$$
$$9 = (\pm 1)^2 + 2.0^2 + 8.0^2 + 8(\pm 1)^2,$$
$$9 = (\pm 1)^2 + 2(\pm 2)^2 + 8.0^2 + 8.0^2,$$
$$9 = (\pm 3)^2 + 2.0^2 + 8.0^2 + 8.0^2.$$

Soit enfin $m = 17$. Nous aurons

$$N = 2.18 = 36;$$

et c'est ce que vérifient les équations

$$17 = 3^2 + 2.2^2 + 8.0^2 + 8.0^2,$$
$$17 = 3^2 + 2.0^2 + 8.1^2 + 8.0^2,$$
$$17 = 1^2 + 2.0^2 + 8.1^2 + 8.1^2,$$
$$17 = 1^2 + 2.2^2 + 8.1^2 + 8.0^2,$$

en affectant du double signe $\pm$ les racines des carrés qui ne sont pas nuls et en opérant les permutations convenables.

2. Soit à présent n pair, $n = 2^\alpha m$, $\alpha > 0$. Il est clair que dans l'équation

$$2^\alpha m = x^2 + 2y^2 + 8z^2 + 8t^2,$$

le premier carré sera pair. Soit donc $x = 2x_1$; en divisant par 2, nous aurons

$$2^{\alpha-1} m = 2x_1^2 + y^2 + 4z^2 + 4t^2,$$

ou bien

$$2^{\alpha-1} m = y^2 + 2x_1^2 + 4z^2 + 4t^2,$$

en sorte que nous serons ramenés à la forme considérée dans l'article précédent.

D'après cela, voici comment le nombre N des représentations d'un entier pair $2^\alpha m$, par la forme actuelle

$$x^2 + 2y^2 + 8z^2 + 8t^2,$$

se calculera suivant les cas.

Pour n impairement pair, $n = 2m$, on aura

$$N = 2\omega_1(m),$$

quelle que soit la forme linéaire de m.

Et pour n pairement pair, $n = 2^\alpha m$, $\alpha > 1$, il faudra prendre

$$N = 2(2^{\alpha-1} - 1)\omega_1(m)$$

si $m = 8k \pm 1$, mais

$$N = 2(2^{\alpha-1} + 1)\omega_1(m)$$

si $m = 8k \pm 3$.

5. On peut aussi demander à part le nombre M des représentations *propres* de l'entier n ou $2^\alpha m$, par la forme

$$x^2 + 2y^2 + 8z^2 + 8t^2$$

qui nous occupe. Voici les résultats qu'on obtient à cet égard, au moyen de la fonction $O_1(m)$, la même qui a figuré pour un usage analogue dans l'article précédent.

Pour n impair, $n = m$, on a $M = 0$, si m est de l'une des deux formes $8k - 1$, $8k - 3$; mais

$$M = 2O_1(m),$$

si m est de la forme $8k + 1$ ou de la forme $8k + 3$.

Pour n impairement pair, $n = 2m$, on a

$$M = 2O_1(m),$$

quelle que soit la forme linéaire de m.

Pour n divisible par 4, non par 8, $n = 4m$, on a

$$M = 0$$

si $m = 8k + 1$, mais

$$M = 4O_1(m)$$

si $m = 8k + 3$, ou bien

$$M = 6O_1(m)$$

si $m = 8k - 3$, enfin

$$M = 2O_1(m)$$

si $m = 8k - 1$.

Pour n divisible par 8, non par 16, $n = 8m$, il vient

$$M = 4O_1(m)$$

si $m = 8k \pm 1$, mais

$$M = 8O_1(m)$$

si $m = 8k \pm 3$.

Enfin pour n divisible par 16, $n = 2^\alpha m$, $\alpha > 3$, on a généralement

$$M = 3.2^{\alpha-2}O_1(m),$$

quelle que soit la forme linéaire de m.