JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

Sur la forme $X^2 + 8\left(Y^2 + Z^2 + T^2\right)$

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 7 (1862), p. 5-8.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1862_2_7__5_0>

SUR LA FORME

$X^2 + 8(Y^2 + Z^2 + T^2)$;

PAR M. J. LIOUVILLE.

1. Étant donné un entier n pair ou impair (que je représenterai par $2^\alpha m$, m étant impair et l'exposant α pouvant se réduire à zéro), on demande le nombre N des représentations de n par la forme

$$X^2 + 8(Y^2 + Z^2 + T^2),$$

c'est-à-dire le nombre N des solutions de l'équation indéterminée

$$n = X^2 + 8(Y^2 + Z^2 + T^2),$$

où X, Y, Z, T sont des entiers indifféremment positifs, nuls ou négatifs.

Cette question sera aisée à résoudre si l'on se rappelle ce que nous avons dit (dans le cahier de juillet 1861) au sujet des deux formes

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2t^2, \quad x^2 + 2(y^2 + z^2 + t^2);$$

et la fonction numérique de m dont tout dépendra sera encore celle que nous désignons à l'endroit cité par la simple lettre S, et aussi par $\omega_1(m)$. Ayant décomposé l'entier impair m en deux facteurs d, δ de toutes les manières possibles, on a

$$\omega_1(m) = \sum (-1)^{\frac{\delta^2-1}{8}} d.$$

2. Prenons d'abord n impair, $n = m$. Il est évident que les entiers impairs représentés par $X^2 + 8(Y^2 + Z^2 + T^2)$ sont tous $\equiv 1 \pmod{8}$, en sorte que $N = 0$ quand m est de la forme $8k - 1$ ou de la forme $8k \pm 3$. Soit donc $m = 8k + 1$. J'observe qu'avec cette dernière valeur de m, l'équation

$$m = X^2 + 8(Y^2 + Z^2 + T^2)$$

ne diffère pas de celle-ci

$$m = X^2 + 2(y^2 + z^2 + t^2),$$

attendu que $m - X^2$ étant un multiple de 8, les entiers y, z, t ne peuvent être que pairs. Or le nombre des solutions de l'équation

$$m = 8k + 1 = X^2 + 2(y^2 + z^2 + t^2)$$

est $2\omega_1(m)$. Pour le nombre N des solutions de notre équation

$$m = 8k + 1 = X^2 + 8(Y^2 + Z^2 + T^2),$$

on a donc aussi

$$N = 2\omega_1(m).$$

5. Prenant ensuite n pair, nous voyons qu'aucun nombre impairement pair ne peut être représenté par la forme

$$X^2 + 8(Y^2 + Z^2 + T^2).$$

Ainsi pour $n = 2m$, on a $N = 0$. Mais pour n divisible par 4, non par 8, on a

$$N = 2\omega_1(m)$$

quand $m = 8k \pm 1$, et

$$N = 6\omega_1(m)$$

quand $m = 8k \pm 3$. En effet, l'équation

$$4m = X^2 + 8(Y^2 + Z^2 + T^2)$$

exige que l'on ait en nombres entiers $X = 2x$, et par conséquent se ramène à l'équation déjà traitée par nous

$$m = x^2 + 2(Y^2 + Z^2 + T^2).$$

En général l'équation

$$2^\alpha m = X^2 + 8(Y^2 + Z^2 + T^2),$$

à partir de $\alpha = 2$, se ramène à celle-ci :

$$2^{\alpha-2} m = x^2 + 2(Y^2 + Z^2 + T^2).$$

Donc, pour $\alpha > 2$, le nombre N des solutions de l'équation

$$2^\alpha m = X^2 + 8(Y^2 + Z^2 + T^2)$$

est exprimé par la formule

$$N = 2\left[2^{\alpha-1} - (-1)^{\frac{m^2-1}{8}}\right]\omega_1(m),$$

en sorte que l'on a

$$N = 2(2^{\alpha-1} - 1)\,\omega_1(m)$$

quand $m = 8k \pm 1$, mais

$$N = 2(2^{\alpha-1} + 1)\,\omega_1(m)$$

quand $m = 8k \pm 3$.

4. On peut aussi désirer de connaître le nombre M des solutions propres de l'équation

$$n \quad \text{ou} \quad 2^\alpha m = X^2 + 8(Y^2 + Z^2 + T^2).$$

Il faudra alors substituer à la fonction $\omega_1(m)$ une autre fonction numérique

$$O_1(m)$$

que je dois d'abord définir.

Soit p un quelconque des facteurs premiers dont m se compose et μ son exposant dans l'entier impair m, en sorte que l'on puisse écrire, d'après une notation connue,

$$m = \prod(p^\mu).$$

Je définis $O_1(m)$ par l'équation

$$O_1(m) = \prod\left[p^\mu + (-1)^{\frac{p^2-1}{8}}p^{\mu-1}\right],$$

que l'on peut écrire aussi, au moyen du signe $\left(\frac{a}{b}\right)$ de Legendre et de Jacobi,

$$O_1(m) = \prod\left[p^\mu + \left(\frac{2}{p}\right)p^{\mu-1}\right].$$

Ajoutons que pour $m = 1$, nous prenons $O_1(m) = 1$.

Cela posé, pour n impair, $n = m$, on a

$$\mathrm{M} = 0$$

quand m est de la forme $8k - 1$ ou de la forme $8k \pm 3$, mais

$$\mathrm{M} = 2\mathrm{O}_1(m)$$

quand $m = 8k + 1$.

Pour n impairement pair, $n = 2m$, on a toujours

$$\mathrm{M} = 0.$$

Pour n divisible par 4, non par 8, $n = 4m$, on a

$$\mathrm{M} = 0$$

quand $m = 8k + 1$, mais

$$\mathrm{M} = 2\mathrm{O}_1(m)$$

quand $m = 8k - 1$, et

$$\mathrm{M} = 6\mathrm{O}_1(m)$$

quand $m = 8k \pm 3$.

Pour n divisible par 8, non par 16, $n = 8m$, on a

$$\mathrm{M} = 6\mathrm{O}_1(m)$$

quand $m = 8k \pm 1$, mais

$$\mathrm{N} = 10\mathrm{O}_1(m)$$

quand $m = 8k \pm 3$.

Enfin pour n divisible par 16, c'est-à-dire pour $n = 2^\alpha m$, avec $\alpha > 3$, on a, quelle que soit la forme linéaire de m, la formule unique que voici :

$$\mathrm{M} = 3.2^{\alpha - 2}\mathrm{O}_1(m).$$

Nous croyons pouvoir nous dispenser d'ajouter des exemples.