JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

Note de M. Liouville

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 7 (1862), p. 44-48.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1862_2_7__44_0>

NOTE DE M. LIOUVILLE.

En reproduisant dans le Journal de Mathématiques ces deux Lettres extraites des *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* (séance du 5 août 1861), je me bornerai à ajouter quelques remarques, remettant à une autre époque les longs développements dans lesquels j'aurai à entrer et qui, si Dieu m'accorde le temps nécessaire, contribueront, je crois, aux progrès de la science des nombres.

On pense bien qu'après avoir reçu la Lettre de M. Hermite, j'ai profité des premiers moments dont j'ai pu disposer pour rechercher dans les Notes que j'ai accumulées en 1857, sans qu'il m'ait été donné depuis de reprendre en liberté mon travail, ce qu'il pouvait y avoir d'analogue à la savante analyse de mon ingénieux confrère. En effet, mes formules se rattachent aussi à la théorie des fonctions elliptiques : seulement elles contiennent plutôt cette théorie qu'elles n'en dépendent. Je les démontre toutes à priori fort simplement; mais on n'a pas non plus de peine à y arriver au moyen des fonctions elliptiques. Il y a là un genre de traduction que l'habitude rend facile. Je devais donc avoir obtenu des résultats semblables à ceux que M. Hermite tire de ses calculs, et peut-être ces résultats mêmes, sous une expression différente. Une seule chose, en réalité, m'avait manqué, c'était de reconnaître la liaison qui existe entre des nombres de formes quadratiques binaires et des nombres de solutions de certaines équations qui s'étaient présentées à moi. L'interprétation que M. Hermite donne de l'équation

$$N = (2n+1)(2n+4b+3) - 4a^2,$$

m'a subitement éclairé. J'avais rencontré autrefois cette même équation écrite ainsi :

$$N = d_1\delta_1 + (d_1 + \delta_1)\delta_2,$$

N désignant un entier donné $4g + 3$, et d_1, δ_1, δ_2 des entiers impairs positifs, soumis à cette restriction que la somme $d_1 + \delta_1$ soit impairement paire [*]. Mais ce n'est que par le travail de M. Hermite que j'ai su que le nombre des solutions de cette équation est précisément le nombre des formes de déterminant $-$N dont un au moins des coefficients extrêmes est impair. Le reste était d'avance dans mes Notes, et l'analyse de M. Hermite, à partir de là, ne m'a rien appris. J'ajoute que maintenant aucun des théorèmes de M. Kronecker n'échappe à mes démonstrations.

Prenons comme exemple un de ceux que M. Hermite a pour le moment laissés de côté, ou plutôt une combinaison de deux de ceux-là, concernant la somme des nombres de formes à déterminants négatifs ayant pour valeurs absolues $2m - 1^2$, $2m - 3^2$, $2m - 5^2, \ldots$, où m est un entier impair : on ne compte pas les formes dont les coefficients extrêmes sont tous les deux pairs. M. Kronecker trouve cette somme égale à

$$\frac{1}{2}[\zeta_1(m) + \rho(m)],$$

$\zeta_1(m)$ représentant la somme des diviseurs de m et $\rho(m)$ l'excès du nombre des diviseurs de m qui sont $\equiv 1 \pmod{4}$ sur le nombre de ceux $\equiv 3 \pmod{4}$. Or, pour moi, ce théorème restait caché, quoique je l'eusse trouvé pour ainsi dire, parce qu'au lieu de me rattacher aux formes quadratiques, je considérais le nombre des solutions d'une équation de la forme

$$p = d_2\delta_2 + 2^{\alpha_3}(d_2 + \delta_2)\delta_3,$$

où le premier membre est un entier $4\mu + 1$ et où d_2, δ_2, δ_3 sont des entiers impairs et positifs : on suppose $\alpha_3 > 0$, ou autrement dit la somme $d_2 + \delta_2$ impairement paire. Je prenais $p = 2m - m_1^2$, m impair

[*] D'après les valeurs admises pour n, b et a, on passe d'une équation à l'autre, en égalant d_1, δ_1, δ_3 à $2n + 1 + 2a$, $2n + 1 - 2a$, $2b + 1$, respectivement.

donné, $m_1 = 1, 3, 5, \ldots$, comme dans le théorème de M. Kronecker; et c'est au nombre total des solutions des équations successives comprises sous le type général dont il vient d'être question que mes recherches s'appliquaient. Mais ce n'est qu'en imitant le mode de discussion de M. Hermite que j'ai reconnu que le nombre des solutions de chaque équation particulière

$$p = d_2\delta_2 + 2^{\alpha_3}(d_2 + \delta_2)\delta_3,$$

devient le nombre des formes de déterminant $-p$ (dont un au moins des coefficients extrêmes est impair) quand on y ajoute la moitié du nombre des diviseurs de p, augmenté d'une unité quand p est un carré. Alors mon théorème s'est changé en celui de M. Kronecker.

Un mot sur les formules dont j'ai eu à me servir ici. Soit $F(x)$ une fonction impaire, en sorte que $F(-x) = -F(x)$, $F(0) = 0$. Prenons un nombre impair M et soumettons-le aux deux modes de partition indiqués par les équations

$$M = 2M'^2 + D''\Delta'', \quad 2M = M_1^2 + D_2\Delta_2,$$

où M_1, D_2, Δ_2, D'', Δ'' sont des entiers impairs positifs, tandis que M' est indifféremment pair ou impair, positif, nul ou négatif. On a

$$\sum F(D'' + 2M') = \sum F\left(\frac{D_2 + \Delta_2}{2}\right).$$

Cette équation est comprise comme cas très-particulier dans la première des deux équations nouvelles que j'ai données dans ma réponse à M. Hermite, et même déjà dans mes *formules générales* (onzième article). Elle me sert doublement dans la circonstance actuelle. D'une part j'en tire un lemme très-utile en y supposant $F(x) = 1$ pour $x > 0$, par suite $F(x) = -1$ pour $x < 0$. D'un autre côté, en la combinant avec la formule (D) de mon troisième article (cahier de juin 1858), j'arrive à une autre formule importante. Soit m un entier impair donné. Soumettons-le aux deux modes de partition indiqués par les équations

$$m = 2m'^2 + d''\delta''$$

et

$$2m = m_1^2 + d_2\delta_2 + 2^{\alpha_3+1}d_3\delta_3,$$

où les entiers m_1, d_2, δ_2, d_3, δ_3 sont impairs et positifs, tandis que m' est indifféremment positif, nul ou négatif : on suppose $\alpha_3 > 0$, c'est-à-dire la somme $d_2 + \delta_2$ impairement paire. Si la fonction $f(x)$ est paire, en sorte que $f(-x) = f(x)$, la somme

$$\sum [d'' f(2m') - f(2m') - 2f(2m'+2) - \ldots - 2f(2m' + \delta'' - 1)],$$

qui se rapporte au premier mode de partition, vaudra toujours le double de la somme

$$\sum \left[f\left(\frac{d_2+\delta_2}{2} - d_3\right) - f\left(\frac{d_2+\delta_2}{2} + d_3\right) \right],$$

qui appartient au second mode. Il faudra maintenant prendre $f(0) = 1$, et $f(x) = 0$ pour x différent de 0. Alors il n'y aura plus à considérer que les valeurs de d_3 pour lesquelles

$$d_3 = \frac{d_2 + \delta_2}{2},$$

en sorte que l'équation

$$2m = m_1^2 + d_2 \delta_2 + 2^{\alpha_3+1} d_3 \delta_3$$

deviendra

$$2m - m_1^2 = d_2 \delta_2 + 2^{\alpha_3} (d_2 + \delta_2) \delta_3,$$

où l'on reconnaît une équation dont on a parlé plus haut. L'égalité obtenue par notre hypothèse sur $f(x)$, jointe au lemme préliminaire, donne notre théorème; et nous savons à présent, grâce à M. Hermite, y voir le théorème de M. Kronecker.

Dans les équations de *partition* écrites plus haut, mettez $2^\alpha m$ au lieu de m, $2^{\alpha''} d''$ au lieu de d'', α et α'' étant > 0, faites $\alpha_3 = 0$, conservez d'ailleurs les autres notations et continuez à exiger que la somme $d_2 + \delta_2$ soit impairement paire; mais à la formule (D) de mon troisième article substituez la formule (a) du second. Vous obtiendrez l'équation que voici :

$$\sum \left[f\left(\frac{d_2+\delta_2}{2} - d_3\right) - f\left(\frac{d_2+\delta_2}{2} + d_3\right) \right]$$
$$= \sum 2^{\alpha''-1} d'' [f(2m') - f(2^{\alpha''} d'' + 2m')];$$

et en y prenant encore $f(0) = 1$, avec $f(x) = 0$ quand x diffère de zéro, vous serez conduits à un des théorèmes démontrés par M. Hermite, sans avoir besoin cette fois d'un lemme préliminaire.

Les théorèmes de M. Kronecker sont donc susceptibles d'une démonstration très-simple. Seulement ils supposent une certaine étude de la théorie des formes quadratiques que je n'avais pas faite et que mes théorèmes (tels que je les avais d'abord) n'exigent pas absolument, même quand on les applique aux décompositions d'un entier en trois carrés. Les théorèmes de ce genre se multiplieront beaucoup, et dès à présent nous pourrions en augmenter le nombre. L'échelle des déterminants successifs qui dans le premier exemple ci-dessus était $2m - m_1^2$ et dans le second $2^{\alpha+1} m - m_1^2$, peut être prise par exemple $n - 3s^2$ ou $n - 5s^2$ avec diverses hypothèses sur l'entier fixe n et sur l'entier variable s. Mais cela mérite d'être approfondi.

Je le répète en terminant, on pourra tirer, si on le veut, de la théorie des fonctions elliptiques mes formules fondamentales, très-facilement surtout celles qui dépendent de fonctions d'une seule variable. Il suffit d'observer qu'avec une somme de produits de constantes par des cosinus d'arcs proportionnels à x, on forme nos fonctions paires de x, comme nos fonctions impaires avec des sinus. Le but que je me suis proposé est tout autre. Je veux pour mes formules une démonstration fondée uniquement sur les premiers principes de l'algèbre. Les fonctions elliptiques ne sont ici pour moi qu'un accessoire. Mais si je me rattache moins que M. Hermite aux *Fundamenta nova*, Jacobi reste pourtant mon principal guide. C'est dans sa démonstration arithmétique (admirablement présentée par Dirichlet dans le cahier de mai 1856) pour le nombre des représentations du quadruple d'un entier impair par une somme de quatre carrés impairs, que j'ai puisé mes premières idées.