JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES
FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874
PAR JOSEPH LIOUVILLE

MAXIMILIEN MARIE

Nouvelle théorie des fonctions de variables imaginaires; quatrième partie. Des angles imaginaires et de la courbure des courbes et surfaces imaginaires

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 7 (1862), p. 425-464.
<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1862_2_7__425_0>

NOUVELLE THÉORIE

DES

FONCTIONS DE VARIABLES IMAGINAIRES;

PAR M. MAXIMILIEN MARIE,

Répétiteur à l'École Polytechnique.

QUATRIÈME PARTIE.

DES ANGLES IMAGINAIRES ET DE LA COURBURE DES COURBES ET SURFACES IMAGINAIRES.

(Fin.)

CHAPITRE XI.

Des angles au centre du cercle imaginaire et de la courbure d'une conjuguée quelconque en un quelconque de ses points.

Des angles au centre du cercle imaginaire.

156. *Insuffisance du cercle réel.* — Les droites représentées par l'équation

$$y = (m + n\sqrt{-1})x + p + q\sqrt{-1}$$

partent toutes du point $x = -\frac{q}{n}$, $y = p - \frac{mq}{n}$, et sont respectivement parallèles à celles de mêmes caractéristiques que représente l'équation $y = (m + n\sqrt{-1})\,x$.

Si l'on cherche l'angle $\varphi + \psi\sqrt{-1}$ dont la tangente serait $m + n\sqrt{-1}$, on trouve

$$m \operatorname{tang}^2\varphi - (m^2 + n^2 - 1)\operatorname{tang}\varphi - m = 0$$

et

$$n\sqrt{-1}\,\operatorname{tang}^2(\psi\sqrt{-1}) + (m^2 + n^2 + 1)\operatorname{tang}(\psi\sqrt{-1}) - n\sqrt{-1} = 0;$$

les deux valeurs de $\tang\varphi$ sont réciproques et de signes contraires, ainsi que celles de $\tang(\psi\sqrt{-1})$; il en résulte que les valeurs de φ sont renfermées dans les formules

$$k\pi + \varphi \quad \text{et} \quad k\pi + \frac{\pi}{2} + \varphi,$$

et celles de $\psi\sqrt{-1}$ dans les formules

$$k\pi + \psi\sqrt{-1} \quad \text{et} \quad k\pi + \frac{\pi}{2} + \psi\sqrt{-1}.$$

D'un autre côté, comme l'équation

$$\tang(\varphi + \psi\sqrt{-1}) = m + n\sqrt{-1}$$

n'admet que les solutions renfermées dans la formule $k\pi + \varphi + \psi\sqrt{-1}$, il en résulte que si $k\pi+\varphi$ et $k\pi+\psi\sqrt{-1}$ sont des valeurs conjointes des angles inconnus, les autres seront $k\pi + \frac{\pi}{2} + \varphi$ et $k\pi + \frac{\pi}{2} + \psi\sqrt{-1}$.

157. Ainsi, bien que l'équation

$$y = (m + n\sqrt{-1})x$$

représente une infinité de droites, la recherche des angles que ces droites font avec l'axe des x, instituée comme elle vient de l'être, ne fournirait que les angles

$$k\pi + \varphi + \psi\sqrt{-1},$$

auxquels il ne correspondrait, dans le cercle réel, conformément à ce qui a été dit dans le chapitre précédent, que deux directions opposées, qui, par conséquent, ne se rapporteraient qu'à une seule droite.

Cette droite du faisceau

$$y = (m + n\sqrt{-1})x,$$

dont l'angle avec l'axe des x se trouve défini dans l'équation

$$\tang(\varphi + \psi\sqrt{-1}) = m + n\sqrt{-1},$$

peut être aisément distinguée des autres : c'est l'une des asymptotes communes aux deux hyperboles conjuguées de l'ellipse nulle

$$(y - mx)^2 + n^2 x^2 = 0,$$

qui ont les mêmes axes de symétrie qu'elle. En effet, si l'on rapporte le lieu

$$y = (m + n\sqrt{-1})\,x = x \operatorname{tang}(\varphi + \psi\sqrt{-1})$$

aux axes de l'ellipse

$$(y - mx)^2 + n^2 x^2 = 0,$$

d'une part, l'équation prendra la forme

$$y = n'\sqrt{-1}\,x,$$

et de l'autre l'angle $\varphi + \psi\sqrt{-1}$ n'aura dû être altéré que par la soustraction de l'angle réel dont on aura fait tourner l'axe des x.

On voit par là : 1° que l'angle φ devait être l'inclinaison sur l'axe des x de l'un des deux axes de symétrie de l'ellipse

$$(y - mx)^2 + n^2 x^2 = 0,$$

ce qui explique pourquoi l'on a trouvé pour φ les valeurs

$$k\pi + \varphi \quad \text{et} \quad k\pi + \frac{\pi}{2} + \varphi;$$

2° que si l'on a pris pour nouvel axe des x le grand axe de l'ellipse

$$(y - mx)^2 + n^2 x^2 = 0,$$

n' étant alors moindre que 1, $n'\sqrt{-1}$ pourra être la tangente d'un angle imaginaire sans partie réelle, qui dès lors ne différera pas de $\psi\sqrt{-1}$.

Enfin comme l'angle réel μ qui correspond à un angle imaginaire

$\psi\sqrt{-1}$, sans partie réelle, est défini par l'équation

$$\operatorname{tang}\mu = \frac{\operatorname{tang}(\psi\sqrt{-1})}{\sqrt{-1}},$$

la direction cherchée sera en définitive

$$y = \frac{n'\sqrt{-1}}{\sqrt{-1}}x = n'x,$$

c'est-à-dire qu'elle coïncidera avec celle de l'une des asymptotes de l'hyperbole

$$y^2 - n'^2x^2 = 0,$$

construite sur les axes de l'ellipse

$$(y - mx)^2 + n^2x^2 = 0.$$

158. Il convient toutefois de signaler ici une exception remarquable aux conclusions portées dans les deux numéros précédents.

Si à l'ellipse

$$(y - mx)^2 + n^2x^2 = 0$$

on substituait le cercle

$$y^2 + x^2 = 0,$$

ce cercle ayant une infinité de systèmes d'axes de symétrie rectangulaires, la droite du faisceau

$$y = \sqrt{-1}\,x,$$

à laquelle s'appliqueraient les résultats des calculs précédents, deviendrait indéterminée; ou plutôt, les conclusions précédentes convenant également bien à toutes les droites du faisceau, l'angle $\varphi + \psi\sqrt{-1}$, fourni par le calcul, devrait donner l'inclinaison, sur l'axe des x, d'une quelconque des droites du faisceau.

C'est en effet ce qui est : l'équation

$$\operatorname{tang}(\varphi + \psi\sqrt{-1}) = m + n\sqrt{-1}$$

se décompose en

$$n\sqrt{-1}\,\mathrm{tang}\varphi\,.\,\mathrm{tang}(\psi\sqrt{-1}) + \mathrm{tang}\varphi - m = 0$$

et

$$m\,\mathrm{tang}\varphi\,\mathrm{tang}(\psi\sqrt{-1}) + \mathrm{tang}(\psi\sqrt{-1}) - n\sqrt{-1} = 0,$$

qui, si l'on y fait $m = 0$ et $n = 1$ donnent

$$\mathrm{tang}(\psi\sqrt{-1}) = \sqrt{-1}$$

et

$$\mathrm{tang}\varphi = \frac{0}{0},$$

ce qui s'accorde avec les prévisions énoncées : l'angle $\psi\sqrt{-1}$ est infini, il correspond à 45° réels et l'angle φ reste complétement indéterminé. L'angle $\varphi + \psi\sqrt{-1}$ que donne le calcul convient donc à l'inclinaison sur l'axe des x d'une quelconque des droites du faisceau.

Cette exception est remarquable en ce que la question qui nous occupe, de représenter les inclinaisons sur l'axe des x des droites qui composent un même faisceau, se trouve ainsi capable d'une solution complète, sans l'intervention d'aucun artifice nouveau, quand il s'agit d'un faisceau *circulaire*

$$y = \sqrt{-1}\,x,$$

tandis qu'elle ne pourra être résolue pour un faisceau *elliptique*

$$y = (m + n\sqrt{-1})\,x,$$

qu'en employant de nouveaux moyens.

Quoi qu'il en soit, l'angle que fait avec l'axe des x la droite du faisceau

$$y = \sqrt{-1}\,x,$$

dont la caractéristique est C, se trouve représenté par

$$\varphi + \infty\sqrt{-1},$$

si φ désigne l'angle dont la tangente est $-\frac{1}{C}$, ou l'angle que fait avec l'axe des x le diamètre transverse de la conjuguée du cercle que rencontre la droite considérée.

159. On pourrait regarder le faisceau elliptique

$$y = (m + n\sqrt{-1})\,x$$

comme la projection d'un faisceau circulaire,

$$y = \sqrt{-1}\,x,$$

tracé dans un plan oblique au plan des coordonnées, et qui, le coupant suivant le grand axe de l'ellipse

$$(y - mx)^2 + n^2x^2 = 0,$$

ferait avec lui un angle ayant pour cosinus le rapport du petit au grand axe de cette ellipse.

Cette manière de concevoir le faisceau elliptique suffirait à la représentation graphique; mais je ne pense pas qu'il soit possible d'en tirer la formule de l'angle d'une quelconque des droites qui le composent, avec l'axe des x.

160. Ce qui particularise l'angle imaginaire défini par l'équation

$$\operatorname{tang}(\varphi + \psi\sqrt{-1}) = m + n\sqrt{-1},$$

et en restreint l'appartenance à une seule droite du faisceau

$$y = (m + n\sqrt{-1})\,x,$$

c'est évidemment qu'il est pris dans le cercle réel

$$y^2 + x^2 = 1;$$

et, en effet, le faisceau

$$y = (m + n\sqrt{-1})\,x,$$

ne coupant le cercle

$$y^2 + x^2 = 1,$$

qu'en deux points diamétralement opposés, l'angle $\varphi + \psi\sqrt{-1}$ défini par l'équation

$$\operatorname{tang}(\varphi + \psi\sqrt{-1}) = (m + n\sqrt{-1}),$$

ne pouvait être que l'angle avec l'axe des x du diamètre qui passe par ces deux points.

C'est au reste ce que l'on vérifiera aisément en constatant que les points de rencontre dont il s'agit, appartiennent effectivement à la droite du faisceau à laquelle convient l'angle trouvé.

Si l'on suppose qu'on ait pris pour axe des x le grand axe de l'ellipse

$$(y - mx)^2 + n^2 x^2 = 0,$$

l'équation de ce lieu sera devenue

$$y^2 + n'^2 x^2 = 0,$$

où n'^2 sera moindre que 1; l'équation du faisceau sera donc alors

$$y = n'\sqrt{-1}\,x;$$

quant à l'équation du cercle réel, elle sera restée

$$y^2 + x^2 = 1;$$

mais d'ailleurs les points de rencontre du faisceau avec le cercle n'auront point changé.

Or les coordonnées actuelles de ces points seront

$$x = \frac{1}{\sqrt{1 - n'^2}}$$

et

$$y = \frac{n\sqrt{-1}}{\sqrt{1 - n'^2}},$$

et représenteront le point

$$x = \frac{1}{\sqrt{1 - n'^2}}, \quad y = \frac{n'}{\sqrt{1 - n'^2}},$$

qui appartient bien à la droite

$$y = n'x$$

du faisceau, à laquelle se rapportait, comme on l'a vu, l'angle

$$\varphi + \psi\sqrt{-1}.$$

161. Ce qu'on vient de dire montre clairement ce qu'il y a à faire pour comprendre indifféremment, dans le calcul, toutes les droites d'un même faisceau

$$y = (m + n\sqrt{-1})x :$$

la méthode devra évidemment consister à substituer au cercle réel

$$y^2 + x^2 = 1,$$

un cercle imaginaire

$$y^2 + x^2 = (r + r'\sqrt{-1})^2,$$

où r et r' puissent être déterminés de manière que les points d'intersection de ce cercle imaginaire et du faisceau

$$y = (m + n\sqrt{-1})x,$$

appartiennent à telle droite que l'on voudra du faisceau.

162. *Du cercle imaginaire à centre réel.* — Nous avons dans le chapitre IX ébauché la discussion des conjuguées du cercle imaginaire, dans le cas général, où son équation se présente sous la forme

$$(x - a - a'\sqrt{-1})^2 + (y - b - b'\sqrt{-1})^2 = (r + r'\sqrt{-1})^2;$$

nous allons revenir ici, avec plus de détails, sur le cas particulier, qui doit seul nous occuper dans ce chapitre, où le cercle imaginaire ayant son centre réel, son équation serait de la forme

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = (r + r'\sqrt{-1})^2,$$

et pourrait, par conséquent, être réduite à

$$x^2 + y^2 = (r + r'\sqrt{-1})^2,$$

par un simple changement d'origine.

L'enveloppe imaginaire des conjuguées du lieu

$$y^2 + x^2 = (r + r'\sqrt{-1})^2$$

est le cercle

$$y^2 + x^2 = (r + r')^2;$$

si

$$x = \alpha + \beta\sqrt{-1}$$

et

$$y = \alpha' + \beta'\sqrt{-1}$$

sont les coordonnées d'un point de cette enveloppe, α, α', β et β' satisferont aux équations

$$\alpha^2 + \alpha'^2 = r^2,$$
$$\beta^2 + \beta'^2 = r'^2$$

et

$$\frac{\alpha}{\alpha'} = \frac{\beta}{\beta'} = \frac{1}{C}.$$

Les deux points où la conjuguée C touchera l'enveloppe seront donc aux extrémités de son diamètre couché sur la droite

$$y = Cx.$$

Toutes les conjuguées du lieu étant égales et superposables, puisque l'équation ne change pas lorsqu'on fait tourner les axes d'un angle quelconque autour de l'origine, il suffira de discuter, par exemple, celle qui a ses abscisses réelles.

Si l'on ne donne à x que des valeurs réelles, celle de y pourra s'écrire

$$\begin{aligned} y &= \sqrt{r^2 - r'^2 - x^2 + 2rr'\sqrt{-1}}, \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\sqrt{(r^2 - r'^2 - x^2)^2 + 4r^2r'^2} + r^2 - r'^2 - x^2} \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{-1}\sqrt{\sqrt{(r^2 - r'^2 - x^2)^2 + 4r^2r'^2} - r^2 + r'^2 + x^2}. \end{aligned}$$

Les deux radicaux devant être affectés du même signe ou de signes contraires, suivant que r et r' seront eux-mêmes de même signe ou de signes contraires.

La courbe est symétrique par rapport aux deux axes de coordonnées; elle touche l'enveloppe aux extrémités de son diamètre dirigé suivant l'axe des y, puisque sa caractéristique est infinie; d'ailleurs, en faisant $x = 0$, on trouve

$$y = \pm (r + r'\sqrt{-1}).$$

Le faisceau des asymptotes de toutes les conjuguées étant représenté par l'équation

$$y = \pm \sqrt{-1}\,x,$$

celles de la courbe qui nous occupe se confondent donc avec les bissectrices des angles des axes.

La figure de cette courbe change considérablement lorsque change l'ordre de grandeur de r^2 et de r'^2. En effet, le rayon de courbure de la courbe au point où elle touche son enveloppe est

$$\pm \frac{r^2 + r'^2}{r - r'},$$

d'ailleurs les deux courbures sont de même sens ou de sens contraires, suivant que r^2 est plus grand ou plus petit que r'^2.

Lors donc que r'^2 est plus grand que r^2, la courbe tournant sa convexité à l'enveloppe, s'éloigne peu de la figure de l'hyperbole équilatère qui toucherait l'enveloppe aux mêmes points; toutefois elle embrasse cette hyperbole, car son rayon de courbure

$$\pm \frac{r^2 + r'^2}{r - r'}$$

est toujours plus grand que celui de l'hyperbole qui est

$$\pm (r + r').$$

En effet, si r' est positif, comme il est plus grand en valeur absolue que r, les deux rayons de courbure sont

$$\frac{r^2+r'^2}{r'-r} \quad \text{et} \quad r'+r;$$

si, au contraire, r' est négatif, il faut prendre pour les deux rayons de ourbure les formules

$$\frac{r^2+r'^2}{r-r'} \quad \text{et} \quad -(r+r');$$

dans l'un et l'autre cas le premier est plus grand que le second.

Au contraire, lorsque r^2 est plus grand que r'^2, la courbe et l'enveloppe, au point où elles se touchent, ont leurs courbures tournées du même côté. Au reste, le rayon de courbure de la conjuguée est toujours plus grand que celui de l'enveloppe, puisque ce dernier est encore $\pm(r+r')$.

On peut vérifier aisément de la manière suivante ces indications de la théorie : Pour savoir si la courbe coupe ou non ses deux tangentes $y=\pm(r+r')$, posons

$$y=\sqrt{r^2-r'^2-x^2+2rr'\sqrt{-1}}=z+u\sqrt{-1},$$

les x des points de rencontre cherchés seront dès lors fournis par les équations

$$z^2-u^2=r^2-r'^2-x^2,$$

$$zu=rr'$$

et

$$z+u=r+r'.$$

Or, les deux dernières donnent

$$z=r \quad \text{et} \quad u=r',$$

ou bien

$$z=r' \quad \text{et} \quad u=r,$$

d'où résultent

$$x^2=0,$$

55..

ou bien

$$x^2 = 2(r^2 - r'^2).$$

On voit donc que la courbe ne coupe sa tangente

$$y = r + r'$$

que lorsque r^2 est plus grand que r'^2.

On peut encore remarquer que le rayon de courbure de la courbe, au point où elle touche l'enveloppe, devient infini lorsque $r = r'$. Mais cette condition suppose r et r' de même signe, de sorte que r et r' variant d'une manière continue, si r^2 dépasse r'^2 dans un sens ou dans l'autre, le sens de la courbure de la courbe au point où elle touche son enveloppe, change dans tous les cas, mais avec des circonstances différentes, suivant que r et r' sont alors de même signe ou de signes contraires. Dans le premier cas, le rayon de courbure devient infini au moment où la courbure change de sens, tandis qu'il reste fini à ce moment dans le cas contraire.

Pour se rendre compte de cette singularité, il suffira d'observer que dans le dernier cas, l'enveloppe s'étant trouvée momentanément réduite à un point à l'origine des coordonnées, les branches supérieure et inférieure de la conjuguée se sont rapprochées jusqu'à se toucher en ce point, ensuite de quoi chacune d'elles continuant son mouvement, le point de contact de celle qui touchait l'enveloppe au-dessus de l'axe des x passe au-dessous, et réciproquement; de sorte qu'en réalité la courbure de chacune des branches reste tournée du même côté, comme cela devait être.

Lorsque r^2 est plus grand que r'^2, la courbe affecte deux formes entièrement différentes, selon que r et r' sont de même signe ou de signes contraires. Dans le premier cas, les parties gauche et droite de la branche qui touche l'enveloppe au-dessus de l'axe des x, après être descendues au-dessous de la tangente menée à l'enveloppe au point de contact, remontent sans couper l'axe des x et prennent pour asymptotes les parties supérieures des bissectrices des angles des axes, tandis que dans le cas contraire les mêmes parties coupent l'axe des x et ont pour asymptotes les parties inférieures des bissectrices des angles des axes.

On vérifie ces indications, que la condition de continuité impose suffisamment, en cherchant les points de rencontre de la courbe avec l'axe des x.

Si l'on pose, comme précédemment,

$$y = z + u\sqrt{-1},$$

d'où résultent

$$z^2 - u^2 = r^2 - r'^2 - x^2$$

et

$$zu = rr',$$

on obtiendra les x des points de rencontre de la courbe avec l'axe des x en joignant aux précédentes la condition

$$z + u = 0.$$

Mais $z + u = 0$ et $zu = rr'$ ne sont compatibles qu'autant que r et r' sont de signes contraires, et il en résulte alors

$$x^2 = r^2 - r'^2.$$

Dans le cas où r et r' sont de même signe, la courbe a, d'apres ce qu'on vient de dire, deux tangentes horizontales outre les droites $y = \pm (r + r')$. Pour les trouver, il faut faire

$$\frac{d(z+u)}{dx} = 0,$$

on a ainsi à résoudre les équations

$$\begin{aligned}
z^2 - u^2 &= r^2 - r'^2 - x^2,\\
zu &= rr',\\
z\frac{dz}{dx} - u\frac{du}{dx} &= -x,\\
z\frac{du}{dx} + u\frac{dz}{dx} &= 0,\\
\frac{dz}{dx} + \frac{du}{dx} &= 0,
\end{aligned}$$

ou bien

$$\frac{dz}{dx}(u-z)=0,$$

$$\frac{dz}{dx}(u+z)=-x,$$

$$zu=rr',$$

$$z^2-u^2=r^2-r'^2-x^2.$$

Si r et r' étaient de signes contraires, il en serait de même de z et u, de sorte que l'équation

$$\frac{dz}{dx}(u-z)=0$$

ne donnerait que

$$\frac{dz}{dx}=0, \qquad \text{d'où} \qquad x=0, \quad z=\pm r, \quad u=\pm r';$$

mais si r et r' sont de même signe, on peut satisfaire à l'équation

$$\frac{dz}{dx}(u-z)=0,$$

en posant

$$u=z,$$

et il en résulte

$$x^2=r^2-r'^2, \quad u=z=\pm\sqrt{rr'}.$$

Il serait facile, d'après toutes ces indications, de construire la courbe dans chaque cas distinct.

On peut encore remarquer que, si r' était nul, la courbe se composerait de la circonférence du cercle

$$y^2+x^2=r^2,$$

et de l'hyperbole équilatère

$$y^2-x^2=-r^2,$$

et que si r était seul, elle se réduirait à l'hyperbole équilatère

$$y^2-x^2=r'^2.$$

163. *Des angles au centre du cercle imaginaire.* — Le rayon de l'enveloppe circulaire des conjuguées du lieu

$$y^2 + x^2 = (r + r'\sqrt{-1})^2$$

étant $r + r'$, nous prendrons ce rayon pour unité; en posant d'ailleurs $\frac{r'}{r} = k$, l'équation du cercle deviendra

$$y^2 + x^2 = \left(\frac{1 + k\sqrt{-1}}{1 + k}\right)^2.$$

Si x et y désignent les coordonnées d'un point de ce lieu,

$$x_1 = \frac{x}{\left(\frac{1 + k\sqrt{-1}}{1 + k}\right)} \quad \text{et} \quad y_1 = \frac{y}{\left(\frac{1 + k\sqrt{-1}}{1 + k}\right)}$$

satisferont à l'équation

$$y^2 + x^2 = 1$$

du cercle réel; x_1 et y_1 seront le cosinus et le sinus d'un angle défini analytiquement et géométriquement, $\varphi + \psi\sqrt{-1}$.

Nous avons, dans le chapitre précédent, regardé l'expression $\varphi + \psi\sqrt{-1}$ comme représentant l'inclinaison sur l'axe des x du rayon mené de l'origine au point $[x_1, y_1]$ du cercle réel.

Nous regarderons de même ici l'expression

$$\left(\frac{1 + k\sqrt{-1}}{1 + k}\right)^2 (\varphi + \psi\sqrt{-1}) = \Phi + \Psi\sqrt{-1}$$

comme représentant l'inclinaison sur l'axe des x du rayon mené de l'origine au point $[x, y]$.

Les valeurs conjointes de x et de y lorsque k est donné, déterminent évidemment $\Phi + \Psi\sqrt{-1}$ à un multiple près de

$$2\pi\left(\frac{1 + k\sqrt{-1}}{1 + k}\right)^2,$$

et réciproquement.

164. L'angle $\Phi + \Psi\sqrt{-1}$ est déjà défini géométriquement, d'une manière indirecte, par sa relation avec l'angle $\varphi + \psi\sqrt{-1}$; mais nous allons voir qu'il comporte par rapport à la conjuguée du cercle

$$x^2 + y^2 = \left(\frac{1 + k\sqrt{-1}}{1+k}\right)^2,$$

sur laquelle se trouve le point correspondant $[x, y]$, et par rapport à l'enveloppe, une définition directe, analogue à celle que nous avons donnée dans le chapitre précédent de l'angle $\varphi + \psi\sqrt{-1}$ tracé au centre du cercle réel.

Nous supposerons d'abord que le point $[x, y]$ appartienne à la conjuguée $C = 0$ du lieu

$$x^2 + y^2 = \left(\frac{1 + k\sqrt{-1}}{1+k}\right)^2,$$

laquelle touche son enveloppe aux extrémités du diamètre couché sur l'axe des x : les autres cas se ramèneront aisément à celui-là, puisque pour effectuer le passage il suffira de faire tourner les axes, d'un angle réel, autour de l'origine.

Supposons que le point $[x, y]$ appartienne à la portion supérieure de la branche de droite de la conjuguée $C = 0$; soient M ce point, P le pied de son ordonnée, A l'extrémité droite du diamètre horizontal et O le centre de l'enveloppe.

L'intégrale

$$\int dx\sqrt{(r + r'\sqrt{-1})^2 - x^2}$$

est

$$\frac{1}{2}(r + r'\sqrt{-1})^2\left[\frac{x}{r + r'\sqrt{-1}}\sqrt{1 - \left(\frac{x}{r + r'\sqrt{-1}}\right)^2} - \arccos\frac{x}{r + r'\sqrt{-1}}\right];$$

si l'on prend pour limite inférieure l'abscisse du point A, c'est-à-dire $r + r'\sqrt{-1}$, on a donc

$$\int_{r + r'\sqrt{-1}}^{x} dz\sqrt{(r + r'\sqrt{-1})^2 - x^2}$$

$$= \frac{1}{2}(r + r'\sqrt{-1})^2\left[\frac{x}{r + r'\sqrt{-1}}\sqrt{1 - \left(\frac{x}{r + r'\sqrt{-1}}\right)^2} - \arccos\frac{x}{r + r'\sqrt{-1}}\right],$$

d'où

$$\arc\cos \frac{x}{r+r'\sqrt{-1}}$$

$$= -\frac{1}{\frac{1}{2}(r+r'\sqrt{-1})^2}\int_{r+r'\sqrt{-1}}^{x} dx\sqrt{(r+r'\sqrt{-1})^2-x^2} + \frac{\frac{1}{2}x\sqrt{(r+r'\sqrt{-1})^2-x^2}}{\frac{1}{2}(r+r'\sqrt{-1})^2}.$$

Or $\sqrt{(r+r'\sqrt{-1})^2-x^2}$ étant réel, $\frac{1}{2}x\sqrt{(r+r'\sqrt{-1})^2-x^2}$ en y remplaçant $\sqrt{-1}$ par 1 (tous calculs faits, bien entendu), représenterait l'aire du triangle OMP; d'un autre côté

$$\int_{r+r'\sqrt{-1}}^{x} dx\sqrt{(r+r'\sqrt{-1})^2-x^2},$$

en y remplaçant aussi $\sqrt{-1}$ par 1, donnerait l'aire du segment AMP; par conséquent en remplaçant de même $\sqrt{-1}$ par 1 dans

$$\frac{1}{2}x\sqrt{(r+r'\sqrt{-1})^2-x^2} - \int_{r+r'\sqrt{-1}}^{x} dx\sqrt{(r+r'\sqrt{-1})^2-x^2},$$

on obtiendra l'aire du secteur AOM compris entre la conjuguée et les deux rayons OA et OM.

Ainsi l'arc dont le cosinus est $\frac{x}{r+r'\sqrt{-1}}$ est le rapport à $(r+r'\sqrt{-1})^2$ du double de l'aire du secteur AOM, convenablement décomposée en parties réelle et imaginaire.

En d'autres termes, la somme $\Phi + \Psi$ des deux parties réelle et imaginaire de la quantité $\Phi + \Psi\sqrt{-1}$, définie plus haut, est le double du rapport du secteur AOM au carré $(r+r')^2$.

Pour connaître Φ et Ψ, il resterait donc seulement à savoir comment se décompose

$$\Phi + \Psi.$$

Or l'angle

$$\varphi + \psi\sqrt{-1}$$

est, par hypothèse, tel que son sinus multiplié par $r+r'\sqrt{-1}$ se trouve réel, puisque ce produit n'est autre que l'y du point décrivant que l'on suppose appartenir à la conjuguée $C = 0$.

Ainsi φ et ψ sont liés par la condition que

$$\sin(\varphi + \psi\sqrt{-1})(r + r'\sqrt{-1})$$

soit réel, c'est-à-dire

$$r'\sqrt{-1}\sin\varphi\cos\psi\sqrt{-1} + r\cos\varphi\sin\psi\sqrt{-1} = 0,$$

d'où

$$\operatorname{tang}\varphi\cot\psi\sqrt{-1} = \frac{r\sqrt{-1}}{r'} = \frac{\sqrt{-1}}{k}.$$

Cette relation entre φ et ψ en fournira une correspondante entre Φ et Ψ, qui, jointe à

$$\Phi + \Psi = \frac{2\,\mathrm{sect\,AOM}}{(r+r')^2},$$

achèvera de faire connaître Φ et Ψ.

165. Supposons maintenant que le point $[x, y]$ appartienne à une conjuguée quelconque dont la caractéristique sera $C = -\cot\gamma$, ce qui signifie que la conjuguée C touchera l'enveloppe aux extrémités du diamètre incliné de l'angle γ sur l'axe des x.

On rentrera dans le cas précédent en faisant tourner d'abord les axes de l'angle γ autour de l'origine : par conséquent x' et y' désignant les coordonnées nouvelles d'un point M dont les coordonnées anciennes étaient x et y, B désignant l'extrémité du rayon incliné de l'angle γ sur l'axe des x, Q le pied de la perpendiculaire abaissée du point M sur OB prolongé, $\varphi' + \psi'\sqrt{-1}$ l'angle dont le cosinus et le sinus seraient

$$x'_1 = \frac{x'}{\left(\frac{1+k\sqrt{-1}}{1+k}\right)} \quad \text{et} \quad y'_1 = \frac{y'}{\left(\frac{1+k\sqrt{-1}}{1+k}\right)}:$$

l'angle $\varphi + \psi\sqrt{-1}$ sera égal à

$$\gamma + \varphi' + \psi'\sqrt{-1},$$

par conséquent l'angle $\Phi + \Psi\sqrt{-1}$ aura pour valeur

$$\gamma\left(\frac{1+k\sqrt{-1}}{1+k}\right)^2 + (\varphi' + \psi'\sqrt{-1})\left(\frac{1+k\sqrt{-1}}{1+k}\right)^2.$$

La seconde partie $(\varphi' + \psi'\sqrt{-1})\left(\frac{1+k\sqrt{-1}}{1+k}\right)^2$ de cet angle se lie au double du secteur BOM par les relations qu'on a établies précédemment, et quant à la première, elle représente le produit par $\left(\frac{1+k\sqrt{-1}}{1+k}\right)^2$ du double du secteur AOB.

166. *De l'angle d'un faisceau de droites imaginaires avec l'axe des x.* — Ce qui précède suffira pour expliquer la multiplicité des angles correspondants à un même coefficient angulaire.

Quel que soit le point que l'on considère du lieu

$$y = (m + n\sqrt{-1})\,x,$$

on trouve que $\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ et $\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ sont toujours le sinus et le cosinus du même angle $\varphi + \psi\sqrt{-1}$; mais ce résultat doit être interprété en ce sens que, quel que soit le point $[x, y]$, le rapport à $\left(\frac{1+k\sqrt{-1}}{1+k}\right)^2$ de l'angle $\Phi + \Psi\sqrt{-1}$, que fait avec l'axe des x le rayon du cercle

$$x^2 + y^2 = \left(\frac{1+k\sqrt{-1}}{1+k}\right)^2,$$

auquel appartient le point $[x, y]$, donne toujours la même quantité $\varphi + \psi\sqrt{-1}$: quant à l'angle $\Phi + \Psi\sqrt{-1}$, il varie avec k, par conséquent avec x et y.

Pour exprimer l'angle avec l'axe des x d'une droite quelconque du faisceau

$$y = (m + n\sqrt{-1})\,x,$$

ayant pour caractéristique C, il suffira d'exprimer k en fonction de C par la condition que le point de rencontre des deux lieux

$$y = (m + n\sqrt{-1})\,x \quad \text{et} \quad y^2 + x^2 = \left(\frac{1 + k\sqrt{-1}}{1 + k}\right)^2$$

appartienne au système C.

Nous supposerons d'abord, pour simplifier le calcul, que le faisceau ait son équation réduite à la forme $y = n\sqrt{-1}$; on rentrera ensuite dans le cas général au moyen d'une transformation de coordonnées.

Les coordonnées du point de rencontre, dans le cas du faisceau $y = n\sqrt{-1}\,x$, sont

$$x = \frac{1 + k\sqrt{-1}}{1 + k}\,\frac{1}{\sqrt{1 - n^2}},$$

$$y = \frac{1 + k\sqrt{-1}}{1 + k}\,\frac{n\sqrt{-1}}{\sqrt{1 - n^2}}.$$

Or n est supposé moindre que 1, les parties imaginaires de y et de x sont donc

$$\beta' = \frac{x}{(1 + k)\sqrt{1 - n^2}} \quad \text{et} \quad \beta = \frac{k}{(1 + k)\sqrt{1 - n^2}};$$

la condition pour que le point d'intersection ait pour caractéristique C est donc

$$\frac{\beta'}{\beta} = \frac{n}{k} = C,$$

d'où

$$k = \frac{n}{C}$$

et

$$\frac{1 + k\sqrt{-1}}{1 + k} = \frac{C + n\sqrt{-1}}{C + n}.$$

En conséquence, le cercle imaginaire qui coupe la droite du système C du faisceau est

$$y^2 + x^2 = \left(\frac{C + n\sqrt{-1}}{C + n}\right)^2,$$

l'angle que fait cette droite avec l'axe des x, estimé dans le cercle dont elle forme un rayon, est donc $\left(\frac{C+n\sqrt{+1}}{C+n}\right)^2$ arc tang $(n\sqrt{-1})$.

Si le faisceau considéré se trouvait dans une position quelconque par rapport aux axes, son équation serait

$$y=(m+n\sqrt{-1})\,x=x\,\mathrm{tang}(\varphi+\psi\sqrt{-1});$$

la condition de rencontre entre la droite du système C de ce faisceau et le cercle

$$y^2+x^2=\left(\frac{1+k\sqrt{+1}}{1+k}\right)^2$$

se irerait de la formule précédente en substituant à C la tangente de l'angle de la droite $y=Cx$ avec la droite $y=x$ tang φ, c'est-à-dire

$$\frac{C-\mathrm{tang}\,\varphi}{1+C\,\mathrm{tang}\,\varphi};$$

elle deviendrait ainsi

$$\frac{1+k\sqrt{-1}}{1+k}=\frac{\frac{C-\mathrm{tang}\,\varphi}{1+C\,\mathrm{tang}\,\varphi}+\mathrm{tang}(\psi\sqrt{-1})}{\frac{C-\mathrm{tang}\,\varphi}{1+C\,\mathrm{tang}\,\varphi}+\frac{1}{\sqrt{-1}}\,\mathrm{tang}(\psi\sqrt{-1})},$$

de sorte que l'angle que ferait cette droite du système C avec l'axe des x, estimé dans le cercle dont elle forme un rayon, serait

$$\left[\frac{\frac{C-\mathrm{tang}\,\varphi}{1+C\,\mathrm{tang}\,\varphi}+\mathrm{tang}(\psi\sqrt{-1})}{\frac{C-\mathrm{tang}\,\varphi}{1+C\,\mathrm{tang}\,\varphi}+\frac{1}{\sqrt{-1}}(\mathrm{tang}\,\psi\sqrt{-1})}\right]^2(\varphi+\psi\sqrt{-1}).$$

167. *De l'angle de deux faisceaux de droites imaginaires.* — Le calcul appliqué à la recherche de l'angle de deux faisceaux

$$y=(m+n\sqrt{-1})\,x=\mathrm{tang}(\varphi+\psi\sqrt{-1})\,x$$

et

$$y=(m'+n'\sqrt{-1})\,x=\mathrm{tang}(\varphi'+\psi'\sqrt{-1})\,x$$

ne fournit, pour l'angle inconnu, que la seule valeur

$$\varphi' - \varphi + (\psi' - \psi)\sqrt{-1};$$

mais à cette valeur unique correspondent des angles en nombre infini lorsqu'on les recherche au centre de tous les cercles imaginaires dissemblables.

Le résultat obtenu, au reste, peut s'interpréter d'une infinité de manières différentes, puisqu'il se rapporte à deux quelconques des droites de l'un et de l'autre faisceau.

Il signifiera, si l'on veut, que l'angle au centre du cercle

$$y^2 + x^2 = \left(\frac{1 + k\sqrt{-1}}{1+k}\right)^2,$$

intercepté entre les droites, de caractéristiques différentes, des deux faisceaux, qui coupent ce même cercle, est

$$[\varphi' - \varphi + (\psi' - \psi)\sqrt{-1}]\left(\frac{1 + k\sqrt{-1}}{1+k}\right)^2,$$

quantité qui se lie, comme on l'a vu précédemment, à l'aire du secteur de la conjuguée considérée compris entre les deux droites choisies dans l'un et l'autre faisceau.

168. *De l'angle de contingence d'un lieu en un point imaginaire.* — L'équation

$$Y - y = -\frac{f'_x(x,y)}{f'_y(x,y)}(X - x) = (m + n\sqrt{-1})(X - x)$$

représente le lieu $f(x,y) = 0$ dans un espace infiniment petit tracé autour du point $[x,y]$ de ce lieu; c'est-à-dire que les droites du faisceau

$$Y = (m + n\sqrt{-1})X$$

sont parallèles aux tangentes à toutes les courbes que l'on pourrait tracer à partir du point $[x,y]$ dans la portion du plan recouverte par les conjuguées du lieu

$$f(x,y) = 0.$$

Si l'on donne à x un accroissement infiniment petit,

$$dx = d\alpha + d\beta\sqrt{-1},$$

il en résulte pour y l'accroissement

$$dy = (m + n\sqrt{-1})(d\alpha + d\beta\sqrt{-1}) = md\alpha - nd\beta + (nd\alpha + md\beta)\sqrt{-1},$$

et le point $[x, y]$ a décrit un élément parallèle à la conjuguée

$$C = \frac{nd\alpha + md\beta}{d\beta}$$

du faisceau

$$y = (m + n\sqrt{-1})x.$$

Si le point $[x, y]$ se déplace infiniment peu, $\frac{dy}{dx}$ change et devient

$$\frac{dy}{dx} + \frac{d^2y}{dx^2}dx;$$

en posant donc

$$\frac{d^2y}{dx^2} = p + q\sqrt{-1},$$

le faisceau des éléments du lieu devient

$$y = \left[m + n\sqrt{-1} + (p + q\sqrt{-1})dx\right]x,$$

l'angle de ce nouveau faisceau avec l'ancien

$$y = (m + n\sqrt{-1})\,x$$

est l'angle de contingence du lieu au point $[x, y]$; il reçoit son interprétation de ce qui précède.

169. *De la courbure d'un lieu en un point imaginaire.* — L'angle de contingence défini comme il vient de l'être a pour expression

$$\frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}dx.$$

Le rapport de cet angle à la différentielle de l'abscisse, et par conséquent à l'expression $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$, est indépendant du chemin suivi par le point $[x, y]$. Cela ne signifie pas que l'angle que fait le faisceau des éléments du lieu au point $[x, y]$ avec le faisceau voisin reste le même tout autour du point $[x, y]$, mais que le rapport de cet angle à ds ou $\sqrt{dx^2 + dy^2}$ reste toujours le même.

Ce rapport est la courbure du lieu au point considéré, et cette courbure reçoit de ce qui précède une interprétation simple.

170. *Transformation imaginaire des coordonnées.* — Si dans une équation $f(x, y) = 0$ on remplace x par $x + a + a'\sqrt{-1}$, y par $y + b + b'\sqrt{-1}$, et qu'on suppose en même temps l'origine des coordonnées transportée effectivement au point dont les coordonnées anciennes étaient $x = a + a'$, $y = b + b'$, l'ensemble du lieu représenté par la nouvelle équation, rapporté aux nouveaux axes, coïncidera avec l'ancien lieu; c'est-à-dire que le lieu entier recouvrira les mêmes portions du plan et le même nombre de fois pour chacune d'elles. Mais les conjuguées se trouveront changées; les points d'une des conjuguées du nouveau lieu dériveront en effet par transformation de points pris sur toutes les conjuguées du premier.

La substitution des expressions

$$x\cos\alpha - y\sin\alpha$$

et

$$y\sin\alpha + y\cos\alpha$$

à la place de x et de y, dans une équation $f(x, y) = 0$, a pour effet, lorsque α est réel, ou bien de faire tourner les axes autour de l'origine d'un angle α, de droite à gauche par exemple, en laissant fixe le lieu représenté par l'équation primitive, ou de faire tourner au contraire de gauche à droite de l'angle α le lieu en question, en laissant les axes primitifs fixes. Les deux opérations rentrent l'une dans l'autre et servent par conséquent aux mêmes usages.

Dans le cas au contraire où l'angle α serait imaginaire sans partie réelle, il serait impossible de considérer la transformation comme revenant à un changement effectif d'axes.

En effet, d'abord le lieu représenté par la nouvelle équation ne sera jamais, sauf un cas particulier que nous examinerons, superposable à l'ancien, c'est-à-dire qu'il ne sera pas seulement transporté, mais en même temps déformé.

D'un autre côté, si l'ouverture effective correspondante à un même angle réel est toujours la même, quel que soit le cercle réel ou imaginaire au centre duquel on place cet angle, ce qui permet de concevoir sans ambiguïté possible une rotation réelle; au contraire l'ouverture réalisée d'un angle imaginaire sans partie réelle dépend essentiellement du rapport $\frac{r'}{r} = k$, qui définit le cercle imaginaire au centre duquel on place cet angle. D'où il résulte que faire tourner les axes, autour de l'origine, d'un angle imaginaire $\alpha\sqrt{-1}$ n'aurait de sens clair qu'autant qu'on aurait choisi d'avance, ce qui ne pourrait se faire qu'arbitrairement, le rapport k des parties imaginaire et réelle du rayon du cercle au centre duquel on devrait compter l'angle $\alpha\sqrt{-1}$.

La question posée doit donc être réduite à savoir comment se déduisent l'un de l'autre les lieux représentés par deux équations

$$f(x, y) = 0$$

et

$$f\left(x\cos\overline{\alpha\sqrt{-1}} - y\sin\overline{\alpha\sqrt{-1}},\quad x\sin\overline{\alpha\sqrt{-1}} + y\cos\overline{\alpha\sqrt{-1}}\right) = 0,$$

rapportées à un même système d'axes rectangulaires.

Cette question est facile à résoudre.

Si x et y désignent les coordonnées d'un point quelconque du premier lieu et $x'y'$ celles du point correspondant du second, les relations

$$x = x'\cos\overline{\alpha\sqrt{-1}} - y'\sin\overline{\alpha\sqrt{-1}}$$

et

$$y = x' \sin\alpha\sqrt{-1} + y' \cos\alpha\sqrt{-1},$$

d'où l'on déduit immédiatement

$$x^2 + y^2 = x'^2 + y'^2,$$

montrent d'abord que les deux points $[x, y]$ et $[x', y']$ appartiennent au même cercle imaginaire.

Ainsi chacun des points du premier lieu ne s'est déplacé que sur le cercle imaginaire où il se trouvait d'abord.

De plus, les mêmes équations donnent

$$\frac{y}{x} = \frac{\frac{y'}{x'} + \operatorname{tang}\alpha\sqrt{-1}}{1 - \frac{y'}{x'}\operatorname{tang}\alpha\sqrt{-1}},$$

c'est-à-dire

$$\operatorname{arc\,tang}\frac{y}{x} = \alpha\sqrt{-1} + \operatorname{arc\,tang}\frac{y'}{x'}.$$

Ainsi le point $[x, y]$ s'est déplacé sur le cercle qui le contenait de façon que l'angle décrit par le rayon vecteur eût pour mesure constante $\alpha\sqrt{-1}$.

Si, dans l'équation

$$y^2 + x^2 = (r + r'\sqrt{-1}),$$

on remplace x et y respectivement par

$$x\cos\alpha - y\sin\alpha$$

et

$$x\sin\alpha + y\cos\alpha,$$

elle reste identiquement la même, quel que soit α, réel ou imaginaire, composé d'une ou de deux parties, de sorte que le lieu ne subit aucune modification.

Ce résultat s'explique tout naturellement, car tous les points du lieu appartenant au même cercle et chacun d'eux ne décrivant qu'un arc de ce cercle, le lieu des nouveaux points ne pouvait pas différer de l'ancien.

171. *Des coordonnées polaires.* — La règle que nous avons adoptée pour figurer les lieux imaginaires représentés par une équation entre les coordonnées rectilignes d'un point, avait été éprouvée dans trop de circonstances diverses pour que nous ne dussions pas renoncer à l'emploi des coordonnées polaires, tant qu'il serait impossible de retrouver dans une équation

$$f(\rho\cos\omega,\ \rho\sin\omega) = 0,$$

les mêmes points qu'avait fournis l'équation

$$f(x,\ y) = 0.$$

Il eût été absurbe d'imaginer arbitrairement un mode de représentation des solutions imaginaires d'une équation en coordonnées polaires, sans se préoccuper de savoir si les lieux, que l'on supposerait dès lors représentés par cette équation, coïncideraient ou non avec ceux qu'avait fournis l'équation correspondante en coordonnées rectilignes.

C'est pourquoi nous nous sommes complétement tu jusqu'ici sur les coordonnées polaires.

Mais la théorie précédente fournit d'elle-même la règle à suivre dans la représentation graphique des coordonnées polaires, lorsqu'elles cessent d'être réelles.

Il est facile de voir que dans l'équation

$$f(\rho\cos\omega,\ \rho\sin\omega) = 0,$$

ω ne doit être regardé que comme la mesure de l'angle que fait avec l'axe des x le rayon vecteur mené au point mobile, l'angle lui-même doit être pris dans le cercle dont le rayon est ρ.

Moyennant cette manière d'entendre les coordonnées polaires, les lieux fournis par les deux équations

$$f(x,\ y) = 0$$

et

$$f(\rho\cos\omega,\ \rho\sin\omega) = 0$$

coïncideront toujours évidemment.

En effet, pour construire l'ensemble des lieux représentés par une équation $f(x, y) = 0$, on pourrait poser $x = \rho\cos\omega$ et $y = \rho\sin\omega$; donnant alors à ω une valeur quelconque $\varphi + \psi\sqrt{-1}$, on trouverait dans le cercle réel de rayon 1, le rayon dont l'angle avec l'axe polaire serait $\varphi + \psi\sqrt{-1}$, les coordonnées de l'extrémité de ce rayon fourniraient les valeurs de $\frac{x}{\rho}$ et de $\frac{y}{\rho}$, qu'il suffirait donc de multiplier par ρ pour obtenir x et y. Or, par cette opération, l'angle $\varphi + \psi\sqrt{-1}$ se trouverait transporté au centre du cercle de rayon ρ, et le point $[x, y]$ obtenu appartiendrait à ce cercle.

172. Pour retrouver dans une équation

$$f(\rho\cos\omega,\ \rho\sin\omega) = 0$$

les conjuguées du lieu

$$f(x, y) = 0,$$

il suffira d'assujettir les parties réelles et imaginaires de ρ et de ω à une condition convenable. Cette condition est facile à exprimer.

Soient

$$\rho = r + r'\sqrt{-1} \quad \text{et} \quad \omega = \varphi + \psi\sqrt{-1};$$

les valeurs correspondantes de x et de y seront

$$x = (r + r'\sqrt{-1})\left(\cos\varphi\cos\overline{\psi\sqrt{-1}} - \sin\varphi\sin\overline{\psi\sqrt{-1}}\right),$$
$$y = (r + r'\sqrt{-1})\left(\sin\varphi\cos\overline{\psi\sqrt{-1}} + \cos\varphi\sin\overline{\psi\sqrt{-1}}\right);$$

pour que le rapport des parties imaginaires de y et de x reste constant et égal à la caractéristique C de la conjuguée qu'on voudrait obtenir, il faudra donc que

$$\frac{r\cos\varphi\sin\overline{\psi\sqrt{-1}} + r'\sqrt{-1}\sin\varphi\cos\overline{\psi\sqrt{-1}}}{-r\sin\varphi\sin\overline{\psi\sqrt{-1}} + r'\sqrt{-1}\cos\varphi\cos\overline{\psi\sqrt{-1}}} = \mathrm{C}$$

ou

$$\frac{r'\sqrt{-1}\tang\varphi + r\tang\overline{\psi\sqrt{-1}}}{r'\sqrt{-1} - r\tang\varphi\tang\overline{\psi\sqrt{-1}}} = C,$$

ou encore

$$\frac{\tang\varphi + \dfrac{r\tang\overline{\psi\sqrt{-1}}}{r'\sqrt{-1}}}{1 - \tang\varphi\dfrac{r\tang\overline{\psi\sqrt{-1}}}{r'\sqrt{-1}}} = C:$$

en posant

$$\tang\gamma = -\frac{1}{C} \quad \text{et} \quad \tang\mu = \frac{r\tang\overline{\psi\sqrt{-1}}}{r'\sqrt{-1}}.$$

Cette condition revient à

$$\frac{\pi}{2} + \gamma = \varphi + \mu,$$

d'où

$$\mu = \frac{\pi}{2} + \gamma - \varphi;$$

par conséquent

$$\tang(\varphi - \gamma) = \frac{r'\sqrt{-1}}{r\tang(\psi\sqrt{-1})},$$

ou enfin

$$\tang(\varphi - \gamma)\tang\psi\sqrt{-1} = \frac{r'\sqrt{-1}}{r} = k\sqrt{-1},$$

condition très-simple et dont la forme est remarquable.

Quand il s'agit de la conjuguée $C = \infty$, cette condition devient

$$\tang\varphi\tang\psi\sqrt{-1} = k\sqrt{-1}.$$

173. *Application aux courbes du second degré.* — Si l'on veut, dans l'équation

$$\rho = \frac{p}{1 - e\cos\omega},$$

retrouver, par exemple, la conjuguée $C = \infty$ de la courbe réelle qu'elle représente, il faudra faire $\varphi = 0$ et $r' = 0$; en effet, l'équation

$$r + r'\sqrt{-1} = \frac{p}{1 - e\cos(\varphi + \psi\sqrt{-1})}$$

se décompose en

$$r\left(1 - e\cos\varphi\cos\overline{\psi\sqrt{-1}}\right) + er'\sqrt{-1}\sin\varphi\sin\psi\sqrt{-1} = p$$

et

$$er\sin\varphi\sin\psi\sqrt{-1} + r'\sqrt{-1}\left(1 - e\cos\varphi\cos\overline{\psi\sqrt{-1}}\right) = 0,$$

la dernière donne

$$\frac{r}{r'\sqrt{-1}} = \frac{e\cos\varphi\cos\overline{\psi\sqrt{-1}} - 1}{e\sin\varphi\sin\overline{\psi\sqrt{-1}}},$$

de sorte que la condition à remplir serait

$$\frac{1}{\operatorname{tang}\varphi\operatorname{tang}\psi\sqrt{-1}} = \frac{e\cos\varphi\cos\overline{\psi\sqrt{-1}} - 1}{e\sin\varphi\sin\overline{\psi\sqrt{-1}}},$$

d'où

$$\operatorname{tang}\varphi\operatorname{tang}\psi\sqrt{-1} = 0.$$

En faisant $\operatorname{tang}\psi\sqrt{-1} = 0$, on aurait évidemment la courbe réelle; par conséquent on obtiendra la conjuguée $C = \infty$ en faisant $\operatorname{tang}\varphi = 0$, mais alors l'équation

$$er\sin\varphi\sin\overline{\psi\sqrt{-1}} + r'\sqrt{-1}\left(1 - e\cos\varphi\cos\overline{\psi\sqrt{-1}}\right)$$

donne $r' = 0$.

On aurait obtenu ces conditions directement en observant que l'équation proposée donnant

$$\rho - e\rho\cos\omega = p,$$

si $\rho\cos\omega$ est réel, ρ doit l'être aussi, ce qui donne $r' = 0$; d'un autre côté, ρ étant réel, $\cos\omega$ devait l'être aussi, ce qui exigeait que ω fût réel ou imaginaire sans partie réelle.

Théorie des courbures des courbes que l'on peut tracer à partir d'un point $[x, y]$ d'un lieu $f(x, y) = 0$ sur la portion du plan recouverte par les conjuguées de ce lieu.

174. La théorie qui va nous occuper est entièrement analogue à celle des courbures des sections planes qu'on peut obtenir dans une surface à partir d'un point de cette surface.

La courbure d'une courbe définie par une condition complémentaire

$$\varphi(\alpha, \beta, \alpha', \beta') = 0,$$

jointe à l'équation

$$f(x, y) = 0$$

du lieu total, ne dépend en un de ses points $[x, y]$ que de $\frac{d\beta'}{d\beta}$, si la condition φ donne au point $[x, y]$

$$\frac{d^2\beta'}{d\beta^2} = 0,$$

et ne dépend, dans le cas contraire, que de

$$\frac{d\beta'}{d\beta} \quad \text{et de} \quad \frac{d^2\beta'}{d\beta^2}.$$

Dans le premier cas, la courbure de la courbe ne dépend que de la direction de sa première tangente, comme la courbure d'une section normale; dans le second elle dépend de la direction de sa première tangente et d'une quantité analogue à l'inclinaison du plan d'une section oblique sur le plan de la section normale qui a même trace sur le plan tangent.

175. Nous désignerons, dans ce qui va suivre, par analogie, la valeur de $\frac{d\beta'}{d\beta}$ au point considéré par C. Ce rapport $\frac{d\beta'}{d\beta}$ n'est autre que la caractéristique de celle des droites du faisceau

$$y = (m + n\sqrt{-1})x,$$

qui est parallèle au premier élément de la courbe.

Nous nous bornerons à l'examen du cas où C ne varierait pas le long de la courbe tracée, du moins dans un intervalle infiniment petit. Ce cas nous intéresse plus particulièrement, parce qu'il comprend celui où la courbe considérée serait une conjuguée du lieu total.

Nous supposerons, pour simplifier les calculs, qu'on ait pris l'axe des x parallèle au grand axe du faisceau des éléments du lieu au point $[x, y]$, de façon que l'équation du faisceau des droites parallèles à ces éléments soit réduite à la forme

$$y = n\sqrt{-1}\,x,$$

n étant moindre que 1.

La direction du premier élément de la courbe décrite est celle de la droite représentée dans le système C par l'équation

$$y = n\sqrt{-1}\,x,$$

c'est-à-dire de la droite

$$y = \left(n + \frac{2n^2}{-n-C}\right)x = \frac{n(C-n)}{C+n}x;$$

la différentielle de x étant

$$dx = d\alpha + d\beta\sqrt{-1},$$

celle de y est

$$dy = d\alpha' + d\beta'\sqrt{-1} = n\sqrt{-1}\left(d\alpha + d\beta\sqrt{-1}\right) = -\,n d\beta + n d\alpha\sqrt{-1},$$

de sorte que la condition que

$$\frac{d\beta'}{d\beta} = C$$

revient à

$$\frac{n d\alpha}{d\beta} = C,$$

ou

$$d\beta = \frac{n}{C}d\alpha,$$

et que, par suite, dx prend la forme

$$dx = d\alpha\left(1 + \frac{n}{C}\sqrt{-1}\right).$$

La différentielle de $\frac{dy}{dx}$ s'exprime donc par

$$\begin{aligned} d\frac{dy}{dx} &= (p + q\sqrt{-1})\,dx = (p + q\sqrt{-1})\left(1 + \frac{n}{C}\sqrt{-1}\right)d\alpha \\ &= \frac{pC - nq}{C}\,d\alpha + \frac{qC - np}{C}\,d\alpha\sqrt{-1}. \end{aligned}$$

Le faisceau des droites parallèles aux éléments du lieu au point $[x + dx, y + dy]$ est donc

$$y = \left(\frac{pC - nq}{C}\,d\alpha + n\sqrt{-1} + \frac{qC + np}{C}\,d\alpha\sqrt{-1}\right)x,$$

et par suite le second élément de la courbe décrite est, d'après une formule connue [*], parallèle à la droite

$$y = \left[\frac{pC - nq + qC + np}{C}\,d\alpha + n + \frac{2\left(n + \frac{qC + np}{C}\,d\alpha\right)}{\frac{pC - nq - qC - np}{C}\,d\alpha - n - C}\right]x,$$

l'angle de contingence $d\varphi$ est donc

$$d\varphi = \frac{\frac{pC - nq + qC + np}{C}\,d\alpha + 2\,\frac{-2n\frac{qC + np}{C}(n + C) - n^2\frac{pC - nq - qC - np}{C}}{(n + C)^2}\,d\alpha}{1 + \left[\frac{n(C - n)}{C + n}\right]^2},$$

[*] La droite de caractéristique C que représente l'équation

$$y = (m + n\sqrt{-1})\,x,$$

est

$$y = \left(m + n + \frac{2n^2}{m - n - C}\right)x.$$

ou

$$d\varphi = \frac{(p\mathrm{C} - nq)(\mathrm{C}^2 + 2\mathrm{C}n - n^2) + (q\mathrm{C} + np)(\mathrm{C}^2 - 2\mathrm{C}n - n^2)}{\mathrm{C}[n + \mathrm{C})^2 + n^2(n - \mathrm{C})^2]}\, d\alpha,$$

ou

$$d\varphi = \frac{p(\mathrm{C}^3 + 3\mathrm{C}^2 n - 3\mathrm{C}n^2 - n^3) + q(\mathrm{C}^3 - 3\mathrm{C}^2 n - 3\mathrm{C}n^2 + n^3)}{\mathrm{C}[(n + \mathrm{C})^2 + n^2(n - \mathrm{C})^2]}\, d\alpha,$$

ou encore

$$d\varphi = \frac{(p + q)(\mathrm{C}^3 - 3\mathrm{C}n^2) + (p - q)(3\mathrm{C}^2 n - n^3)}{\mathrm{C}[(n + \mathrm{C})^2 - n^2(n - \mathrm{C})^2]}\, d\alpha.$$

D'un autre côté, l'élément de chemin réellement parcouru du point $[x, y]$ au point $[x + dx,\ y + dy]$ est

$$\begin{aligned} ds &= \sqrt{(d\alpha + d\beta)^2 + (d\alpha' + d\beta')^2} \\ &= d\alpha \sqrt{\left(1 + \frac{n}{\mathrm{C}}\right)^2 + n^2\left(1 - \frac{n}{\mathrm{C}}\right)^2} \\ &= \frac{d\alpha}{\mathrm{C}} \sqrt{(n + \mathrm{C})^2 + n^2(n - \mathrm{C})^2}, \end{aligned}$$

de sorte que la courbure cherchée est

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{(p + q)(\mathrm{C}^3 - 3\mathrm{C}n^2) + (p - q)(3\mathrm{C}^2 n - n^3)}{[(n + \mathrm{C})^2 + n^2(n - \mathrm{C})^2]^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{\mathrm{R}}.$$

176. On peut, dans cette formule, aux constantes p et q substituer les parties r et r' du rayon de courbure $r + r'\sqrt{-1}$ au point $[x, y]$,

La formule générale de $r + r'\sqrt{-1}$ est

$$r + r'\sqrt{-1} = \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}},$$

ici elle devient

$$r + r'\sqrt{-1} = \frac{(1 - n^2)^{\frac{3}{2}}}{p + q\sqrt{-1}},$$

et comme n^2 est moindre que 1, on en tire

$$p = \frac{r(1-n^2)^{\frac{3}{2}}}{r^2+r'^2} \quad \text{et} \quad q = \frac{-r'(1-n^2)^{\frac{3}{2}}}{r^2+r'^2}.$$

Il en résulte pour le rayon de courbure R la nouvelle valeur

$$R = \left[\frac{(n+C)^2+n^2(n-C)^2}{1-n^2}\right]^{\frac{3}{2}} \frac{r^2+r'^2}{(r-r')(C^3-3Cn^2)+(r+r')(3C^2n-n^3)}.$$

177. On peut aussi introduire dans la formule, au lieu de la variable C, la tangente a de l'angle que la tangente à la courbe tracée, au point $[x,y]$, fait avec le grand axe du faisceau des éléments du lieu en ce point, grand axe qui est actuellement parallèle à l'axe des x. Cette substitution présente plusieurs avantages évidents.

La valeur de a est fournie par la formule

$$a = \frac{d\alpha'+d\beta'}{d\alpha+d\beta} = \frac{-\frac{n^2}{C}+n}{1+\frac{n}{C}} = \frac{-n^2+Cn}{C+n},$$

d'où l'on déduit

$$C = \frac{n(n+a)}{n-a},$$

$$n+C = \frac{2n^2}{n-a} \quad \text{et} \quad n-C = -a\frac{n+C}{n} = -\frac{2an}{n-a}.$$

La substitution donne

$$R = \left(\frac{1+a^2}{1-n^2}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{2n^3(r^2+r'^2)}{a^3r+3na^2r'-3n^2ar-n^3r'}.$$

178. On peut vérifier sur cette formule celle que nous avons donnée, dans le chapitre IX, du rayon de courbure d'une conjuguée au point où elle touche l'une des enveloppes. Cette formule était

$$R = \frac{r^2+r'^2}{r-r'}.$$

Or en un point de l'une des deux enveloppes n est nul puisque $\frac{dy}{dx}$ est réel; d'un autre côté, si la tangente à l'enveloppe a été prise pour axe des x, $\frac{dy}{dx}$ est nul

$$\frac{dy}{dx} = 0;$$

par conséquent

$$\frac{d\alpha' + d\beta'\sqrt{-1}}{d\alpha + d\beta\sqrt{-1}} = 0,$$

ce qui exige que $d\alpha'$ et $d\beta'$ soient nuls, d'où il résulte que C est nul aussi et par suite a, qui du reste doit être préalablement remplacé par n, comme on le verrait aisément dans les formules posées plus haut.

La substitution donne immédiatement

$$R = \frac{r^2 + r'^2}{r - r'}.$$

179. Les valeurs remarquables du rayon de courbure

$$R = \left(\frac{1 + a^2}{1 - n^2}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{2n^3(r^2 + r'^2)}{a^3 r + 3a^2 nr' - 3an^2 r - n^3 r'}$$

sont, pour $a = 0$,

$$R = \frac{2(r^2 + r'^2)}{r'(1 - n^2)^{\frac{3}{2}}},$$

et, pour $a = \infty$,

$$R = \frac{2n^3(r^2 + r'^2)}{r(1 - n^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

La loi de variation des autres valeurs de R dépend essentiellement de la marche de la fonction

$$a^3 r + 3a^2 nr' - 3an^2 r - n^3 r'$$

considérée comme dépendante de a, puisque n, r et r' sont constants en un même point $[x, y]$; il sera donc intéressant d'étudier l'équation

$$a^3 r + 3a^2 nr' - 3an^2 r - n^3 r' = 0.$$

On peut d'abord la réduire à

$$u^3 + 3ku^2 - 3u - k = 0,$$

en posant $\frac{r'}{r} = k$ et prenant pour variable $\frac{a}{n}$ au lieu de a.

Si l'on fait ensuite disparaître le second terme en posant

$$u = t - k,$$

elle devient

$$t^3 - 3(k^2 + 1)t + 2k(k^2 + 1) = 0.$$

La fonction $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}$ des coefficients de cette équation est

$$k^2(k^2 + 1)^2 - (k^2 + 1)^3 = -(k^2 + 1)^2.$$

Ainsi les trois racines sont toujours réelles.

Pour obtenir ces trois racines sous leur forme trigonométrique, il faut poser

$$t = 2\sqrt{k^2 + 1}\,.\,s;$$

l'équation devient alors

$$s^3 - \frac{3}{4}s + \frac{1}{4}\frac{k}{\sqrt{k^2 + 1}} = 0;$$

de sorte que l'angle à diviser en trois parties égales est celui dont la tangente est k.

L'élimination des intermédiaires donne pour a les trois valeurs

$$a = n\left(2\,\frac{\sqrt{r^2 + r'^2}}{r}\sin\frac{\text{arc tang}\,\frac{r'}{r}}{3} - \frac{r'}{r}\right),$$

$$a = n\left(2\,\frac{\sqrt{r^2 + r'^2}}{r}\sin\frac{2\pi + \text{arc tang}\,\frac{r'}{r}}{3} - \frac{r'}{r}\right),$$

et

$$a = n\left(2\,\frac{\sqrt{r^2+r'^2}}{r}\,\sin\frac{4\pi + \operatorname{arc\,tang}\frac{r'}{r}}{3} - \frac{r'}{r}\right).$$

180. Pour déduire de la formule

$$R = \left(\frac{1+a^2}{1-n^2}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{2n^3(r^2+r'^2)}{a^3r + 3a^2nr' - 3an^2r - n^3r'}$$

celle du rayon de courbure d'une conjuguée quelconque C en un quelconque de ses points $[x, y]$, les axes étant d'ailleurs quelconques, il n'y aura qu'à substituer à x et à a leurs valeurs qu'il sera facile d'obtenir de la manière suivante.

En premier lieu, $n\sqrt{-1}$ est la racine moindre que 1, en valeur absolue, de l'équation qui donne la tangente de la partie imaginaire $\psi\sqrt{-1}$ de l'angle avec l'axe des x du faisceau des tangentes à la courbe au point $[x, y]$.

Ainsi, si au point $[x, y]$

$$\frac{dy}{dx} = m_1 + n_1\sqrt{-1},$$

on tirera n de l'équation connue

$$n_1 n^2 - (m_1^2 + n_1^2 + 1)\,n + n_1 = 0,$$

qui donne

$$n = \frac{m_1^2 + n_1^2 + 1 \pm \sqrt{(m_1^2+n_1^2+1)^2 - 4n_1^2}}{2n_1};$$

on prendra donc pour n la valeur

$$n = \frac{m_1^2 + n_1^2 + 1 - \sqrt{(m_1^2+n_1^2+1)^2 - 4n_1^2}}{2n_1},$$

puisque c'est la plus petite.

Quant à a, c'est la tangente de l'angle que la tangente à la conjuguée fait avec le grand axe du faisceau des tangentes à la courbe au point $[x, y]$.

Or la tangente à la conjuguée a pour coefficient angulaire

$$\operatorname{tang}\gamma = m_1 + n_1 + \frac{2n_1^2}{m_1 - n_1 - C};$$

d'un autre côté, la tangente de l'angle φ que le grand axe du faisceau des tangentes à la courbe, au point $[x, y]$, fait avec l'axe des x serait donnée par l'équation

$$m_1 \operatorname{tang}^2\varphi - (m_1^2 + n_1^2 - 1)\operatorname{tang}\varphi - m_1 = 0;$$

mais on ne devrait prendre que celle des racines de cette équation qui conjointement avec n ou $\frac{\operatorname{tang}\psi\sqrt{-1}}{\sqrt{-1}}$ satisferait à l'une des conditions renfermées dans

$$\frac{\operatorname{tang}\varphi + \operatorname{tang}\psi\sqrt{-1}}{1 - \operatorname{tang}\varphi\operatorname{tang}\psi\sqrt{-1}} = m_1 + n_1\sqrt{-1},$$

par exemple à la condition

$$\operatorname{tang}\varphi = m_1 - n_1\sqrt{-1}\operatorname{tang}\varphi\operatorname{tang}(\psi\sqrt{-1}) = m_1 + nn_1\operatorname{tang}\varphi.$$

Il vaudra donc mieux poser tout de suite

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{m_1}{1 - nn_1}.$$

Les angles γ et φ étant ainsi connus, la valeur de a s'en déduira par la formule

$$a = \operatorname{tang}(\gamma - \varphi).$$

181. *De la courbure des surfaces imaginaires.* — Toute section plane d'une des conjuguées d'une surface n'étant autre chose qu'une des conjuguées de la section, par le même plan, de la surface réelle, les théories qui précèdent pourraient aisément être étendues des courbes aux surfaces.

FIN DU TOME SEPTIÈME (2^e SÉRIE).

PARIS. — IMPRIMERIE DE MALLET-BACHELIER,
rue de Seine-Saint-Germain, 10, près l'Institut.