JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

AD. GUIBERT

Propriétés relatives à des nombres premiers

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 7 (1862), p. 414-416.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1862_2_7__414_0>

PROPRIÉTÉS RELATIVES A DES NOMBRES PREMIERS.

PAR M. AD. GUIBERT.

Lagrange a justifié, sur les nombres premiers en progression arithmétique, certaines propriétés avancées par Waring [*]; l'objet du théorème suivant est d'en donner une démonstration générale et succincte qui nous semblait désirable.

THÉORÈME.

n étant impair > 3, soit la progression arithmétique croissante $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n$ de n termes premiers :

1° *Tout nombre premier qui ne surpasse point n, si ce n'est 1, n'entre point dans la progression; quand n est premier, s'il est un terme de cette suite, il est au premier rang.*

2° *La raison r de la progression est divisible par chacun des nombres premiers qui ne surpassent point n, et par n lui-même, s'il est premier et s'il n'entre point dans la progression.*

Pour établir la première partie du théorème, distinguons deux cas, celui de $p_1 = 1$ et celui de $p_1 > 1$.

Soit $p_1 = 1$. On va prouver que p_2 n'est jamais égal à n, si n est premier, ni moindre que n, si l'impair n n'est pas premier.

Admettons, si elle est possible, la progression

$$1,\ n,\ p_3, \ldots,\ p_n.$$

Le terme du rang $n - 2$ serait égal à $1 + (n-1)(n-3)$, qui est le carré de $n - 2$, nombre > 1; ce terme serait donc composé, ce qui est contraire à la supposition.

---

[*] *Voyez* le *Nouveau Recueil des Mémoires de l'Académie de Berlin* pour 1771.

Soit maintenant la progression

$$1, \ n - 2\delta, \ p_3, \dots, \ p_n.$$

L'entier positif δ étant au moins égal à 1 et au plus égal à $\frac{n-3}{2}$; il y aurait un terme du rang $n + 2\delta + 2$, et il serait exprimé par

$$1 + (n - 2\delta - 1)(n - 2\delta + 1),$$

qui est le carré de $n - 2\delta$, nombre > 1.

Lorsque p_1 est > 1, admettons que l'on ait $p_1 = n - 2\delta$, δ étant un entier positif au moins égal à 1; il y aurait alors un terme du rang $n - 2\delta + 1$, dont la valeur $n - 2\delta + r(n - 2\delta)$ est celle d'un nombre composé.

Donc, aucun nombre premier, autre que 1, ne surpassant point n, ne peut être un terme de la progression.

Mais si p_1, autre que 1, ne saurait être moindre que n, il se peut qu'il lui soit égal, comme on le voit dans les exemples qui suivent :

$$n = 5; \quad 5, \ 11, \ 17, \ 23, \ 29;$$
$$n = 7; \quad 7, \ 157, \ 307, \ 457, \ 607, \ 757, \ 907.$$

Ainsi, quand n est premier, s'il entre dans la progression, il s'y trouve au premier rang.

Passons à la seconde partie du théorème.

Soit p un nombre premier quelconque moindre que n ou égal à n au plus, quand n est premier et s'il n'entre point dans la progression; divisons par p les p termes consécutifs à partir de p_1; parmi les p restes obtenus, deux au moins seront égaux; dès lors la différence des deux termes qui les ont fournis est divisible par p; mais cette différence est un multiple de la raison r, moindre que pr; donc p divise r.

Remarque. — Lorsque $n = 3$, le théorème est en défaut dans les deux progressions

$$1, \ 2, \ 3; \qquad 1, \ 3, \ 5.$$

La première est la seule progression arithmétique entre des nombres premiers où 2 puisse entrer; elles contiennent, l'une et l'autre, un terme égal à 3.

Si l'on a une progression arithmétique entre trois nombres premiers dont 3 *ne fasse point partie, la raison sera divisible par* 2×3.

La division de la raison par 2 est manifeste d'après ce qu'on vient de dire, et celle par 3 résulte du raisonnement employé dans la seconde partie du théorème, lequel subsiste encore ici, en faisant $p = 3$.