JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

E. DE JONQUIÈRES

Étude sur les singularités des surfaces algébriques

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 7 (1862), p. 409-413.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1862_2_7__409_0>

ÉTUDE

SUR

LES SINGULARITÉS DES SURFACES ALGÉBRIQUES;

PAR M. E. DE JONQUIÈRES.

NOEUDS OU POINTS CONIQUES.

1. On sait que le plan tangent en un point a d'une surface algébrique S^n, d'un degré quelconque n, coupe la surface suivant une courbe qui a un point double a. Si une autre quelconque des sections planes de S^n, qui passent par le point a, y possède un point double, toutes les sections planes qu'on peut mener ainsi sont dans le même cas. Chacune de ces sections contient donc deux droites osculatrices de la surface, savoir les deux tangentes aux branches de la courbe plane qui se croisent en a; et par conséquent S^n est osculée, au point a, par un cône du second degré. Le point singulier a prend alors le nom de *point double*, ou de *nœud*, ou de *gorge d'un nœud*, ou enfin de *point conique*.

L'ouverture du cône osculateur peut être infiniment petite, et, dans ce cas, le point prend le nom de *point cuspidal*.

Les nœuds des surfaces algébriques jouissent de propriétés importantes, que je vais passer rapidement en revue.

2. *Si la surface $x^{ième}$ polaire d'un point* P, *relative à* S^n, *a un point double* Q, *réciproquement la surface* $(n - x - 1)^{ième}$ *polaire du point* Q *a, en général, le point* P *pour point double.*

3. En particulier,

Si la première polaire du point P *a un point double* Q, *la* $(\overline{n-2})^{ième}$ *polaire du point* Q *a le point* P *pour point double, c'est-à-dire que cette polaire est un cône du second degré dont le sommet est en* P.

4. On nomme *pôle harmonique*, relatif à deux surfaces S^m, S^n, un point dont le plan polaire est le même par rapport aux deux surfaces.

Deux surfaces S^m, S^n *ont, en général,*

$$(m+n-2)\left[(\overline{m-1})^2 + (\overline{n-1})^2\right]$$

pôles harmoniques.

5. Si les surfaces sont l'une et l'autre du degré n, le nombre de ces pôles est simplement $4(\overline{n-1})^3$.

Dans ce cas, il passe une infinité de surfaces du degré n par la courbe d'intersection de ces deux-là, et toutes ces surfaces forment un faisceau.

Les $4(\overline{n-1})^3$ *pôles harmoniques, relatifs à deux des surfaces du faisceau, sont aussi des pôles harmoniques relatifs à toutes les autres.*

En d'autres termes, chacun de ces points a le même plan polaire dans toutes les surfaces du faisceau.

6. On en conclut aisément que chacun de ces points est un point double sur la surface du faisceau qui y passe, et que, réciproquement, si une des surfaces a un point double, ce point est un des $4(\overline{n-1})^3$ pôles harmoniques définis ci-dessus. Donc

Dans un faisceau (S^n) *il existe en général* $4(\overline{n-1})^3$ *points doubles ou nœuds.*

Corollaire. — Si $n=2$, on retrouve le théorème dû à M. Poncelet concernant les quatre cônes du second degré qui passent, en général, par la courbe gauche du quatrième ordre, intersection de deux surfaces du second degré.

7. *Le lieu des points, dont chacun a le même plan polaire par rapport à une surface fixe* S^m *et à l'une des surfaces d'un faisceau* (S^n), *passe par les* $4(\overline{n-1})^3$ *nœuds du faisceau.*

Ce lieu est, en général, une courbe gauche du degré

$$(\overline{m+2n-3})^2 - (n-1)(n+2m-3).$$

8. *Quand deux surfaces d'un faisceau ont un point double com-*

mun, toutes les surfaces du faisceau ont ce même point pour point double.

Les cônes du second degré, osculateurs des surfaces en leur point double commun (1), forment aussi un faisceau. Or trois de ces cônes se réduisent à trois droites, savoir les trois axes conjugués communs à tous les cônes. Donc

9. *Quand les surfaces d'un faisceau ont un point double commun, trois d'entre elles ont un point cuspidal en ce point.*

10. *Quand les surfaces d'un faisceau se touchent en un point, l'une d'elles a un nœud en ce point.*

Donc si les surfaces sont du second degré, la courbe à point double du quatrième ordre, qui est leur intersection commune, est placée sur un cône du second degré, qui a son sommet en ce point double; ce qui d'ailleurs est évident, puisque tout plan mené par ce point ne coupe plus la courbe qu'en deux points, et par conséquent ne contient que deux arêtes du cône.

11. *Le lieu des points de contact des surfaces de deux faisceaux* (S^m), (S^n) *est une courbe à double courbure du degré*

$$(3m^2 + 3n^2 + 4mn - 8m - 8n + 6).$$

12. Si $m = 1$, cette courbe est simplement du degré $(n-1)(3n-1)$. Et on en conclut aisément que le *nombre des points doubles d'un faisceau* (S^n) *est, en général,* $4\overline{(n-1)}^3$, comme plus haut (**6**).

13. On nomme *réseau* de surfaces une série de surfaces du même degré, telle, qu'il n'en passe qu'une seule par deux points quelconques donnés.

Parmi les surfaces d'un réseau, toutes celles qui passent par un même point donné forment un faisceau.

14. *Les plans polaires d'un point quelconque* P, *relatifs à toutes les surfaces d'un réseau, passent par un même point* P'.

15. On conclut du théorème précédent que

Les plans polaires d'un point de l'espace, relatifs à toutes celles des *surfaces d'un réseau qui sont douées d'un point double, enveloppent un cône de la classe* $4(\overline{n-1})^3$.

Corollaire. — Des surfaces du second ordre qui divisent harmoniquement sept segments, ou qui passent par sept points, forment un réseau. Donc

Quand des cônes du second degré divisent harmoniquement sept segments, les plans polaires d'un point quelconque, pris relativement à ces cônes, enveloppent un cône de la quatrième classe. Théorème énoncé par M. Chasles dans le tome LII des *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* (séance du 10 juin 1861).

16. *Le lieu des points coniques des surfaces* S^n *d'un réseau est une courbe gauche du degré* $6(\overline{n-1})^2$.

En particulier, *le lieu des sommets des cônes du second degré, qui divisent harmoniquement sept segments, est une courbe gauche du sixième ordre.*

Théorème démontré par M. Chasles dans le Mémoire précité, et par M. O. Hesse dans un Mémoire sur les tangentes doubles de la courbe plane du quatrième ordre.

17. Des surfaces du degré n forment un *système,* quand il n'en passe qu'une par trois points quelconques donnés.

Toutes les surfaces d'un système qui passent par un même point forment un réseau; toutes celles qui passent par deux mêmes points forment un faisceau.

18. *Le lieu des points de contact des surfaces d'un système, qui est aussi le lieu de leurs points doubles, est une surface* $Q^{4(n-1)}$ *du degré* $4(n-1)$.

19. *Les points polaires de deux points fixes, pris par rapport à toutes les surfaces d'un système, forment deux figures homographiques entre elles.*

Par exemple, les plans polaires de deux points fixes, relatifs à toutes les surfaces du second ordre qui passent par six mêmes points, ou qui divisent harmoniquement six segments, forment deux figures homographiques.

20. Les surfaces polaires premières, relatives à une même S^n :

1° De tous les points de l'espace, forment un *système;*

2° De tous les points d'un plan, forment un *réseau;*

3° De tous les points d'une droite, forment un *faisceau.*

21. *Le lieu des points doubles des surfaces polaires premières relatives à une surface donnée* S^n *est une surface* $Q^{4(n-2)}$ *du degré* $4(n-2)$; c'est une conséquence de (**18**).

22. *Le lieu des points doubles des surfaces* $\overline{n-2}^{\text{ièmes}}$ *polaires d'une surface donnée* S^n, *donc le lieu des sommets des cônes du second degré polaires de* S^n, *est une surface* $P^{4(\overline{n-2})^3}$, *de degré* $4(\overline{n-2})^3$.

Cette surface et la précédente (**21**) sont les *surfaces nodales conjuguées* de la surface S^n; cette expression, en ce qui concerne la surface $Q^{4(n-2)}$ est, plus particulièrement encore, justifiée par le théorème suivant :

23. *La surface nodale* $Q^{4(n-2)}$ *passe par les points doubles de la proposée, si elle en possède, et de même par ses courbes doubles, si elle en est douée.*

Dans tous les cas, elle coupe S^n suivant une courbe gauche du degré $4n(n-2)$ qu'on nomme la *ligne des points d'inflexion* ou *des points paraboliques* de cette surface. J'aurai occasion prochainement de revenir sur ce sujet.

Golfe du Mexique, 29 septembre 1862.