JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES
FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874
PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

Théorème concernant les nombres triangulaires

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 7 (1862), p. 407-408.
<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1862_2_7__407_0>

THÉORÈME CONCERNANT LES NOMBRES TRIANGULAIRES;

Par M. J. LIOUVILLE.

On connaît le théorème énoncé par Fermat, que tout nombre entier n est la somme de trois nombres triangulaires. Gauss l'a démontré, comme on sait, en prouvant que $8n+3$ s'exprime toujours par la somme de trois carrés, naturellement impairs. L'équation

$$8n+3=(2x+1)^2+(2y+1)^2+(2z+1)^2$$

entraîne en effet celle-ci

$$n=\frac{x(x+1)}{2}+\frac{y(y+1)}{2}+\frac{z(z+1)}{2},$$

par conséquent le théorème de Fermat.

A-t-on déjà remarqué (et vaut-il la peine de faire remarquer) que tout entier n est aussi formé de la somme de deux nombres triangulaires plus le double d'un nombre triangulaire? En tout cas, la chose est facile à établir. En effet, Gauss a prouvé que le double d'un entier impair est toujours la somme de trois carrés; et il est visible aussi que de ces trois carrés un sera pair et deux impairs. On a donc, en nombres entiers,

$$2(2n+1)=4u^2+(2t+1)^2+(2z+1)^2,$$

d'où, en multipliant par 2 les deux membres,

$$8n+4=(2u+2t+1)^2+(2u-2t-1)^2+2(2z+1)^2,$$

ou, ce qui revient au même,

$$8n+4=(2x+1)^2+(2y+1)^2+2(2z+1)^2.$$

Développant les carrés au second membre, retranchant 4 de part et d'autre et divisant par 8, on a donc enfin

$$n = \frac{x(x+1)}{2} + \frac{y(y+1)}{2} + 2\cdot\frac{z(z+1)}{2},$$

c'est-à-dire le nouveau théorème dont nous avons parlé, lequel du reste n'est au fond (comme il arrive parfois) qu'un nouvel énoncé d'un théorème depuis longtemps connu et démontré.

Les deux formes

$$x^2 + y^2 + z^2, \quad x^2 + y^2 + 2z^2$$

prises ensemble représentent tous les nombres; mais la première ne peut pas donner les entiers $4^\alpha(8k+7)$, ni la seconde les entiers $2^{2\alpha+1}(8k+7)$. Au contraire chacune des deux expressions

$$\frac{x(x+1)}{2} + \frac{y(y+1)}{2} + \frac{z(z+1)}{2}$$

et

$$\frac{x(x+1)}{2} + \frac{y(y+1)}{2} + 2\cdot\frac{z(z+1)}{2}$$

étant prise séparément les fournit tous.