PAUL SERRET

De quelques analogies de la géométrie du plan à celle de l'espace

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 7 (1862), p. 377-406.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1862_2_7__377_0>

DE

QUELQUES ANALOGIES

DE LA

GEOMÉTRIE DU PLAN A CELLE DE L'ESPACE;

PAR M. PAUL SERRET.

I.

1. Si dans le plan l'on porte bout à bout trois droites perpendiculaires aux côtés d'un triangle et respectivement égales à ces côtés, le circuit résultant se ferme de lui-même en un second triangle égal au premier et dès lors de même surface.

De même, dans l'espace, si l'on porte bout à bout quatre droites perpendiculaires aux faces d'un tétraèdre ABCD et respectivement proportionnelles aux aires de ces faces, le circuit résultant se ferme de lui-même (proposition connue) en un quadrilatère gauche A'B'C'D' ou en un second tétraèdre de même nom et des mêmes sommets : et *l'on a, entre les volumes de ces deux tétraèdres* orthogonaux, *la relation*

$$V' = kV^2,$$

où k désigne une constante.

2. *Les trois angles des arêtes opposées du tétraèdre primitif* ABCD *servent de mesure aux trois dièdres* diagonaux *du quadrilatère orthogonal* A'B'C'D'; les deux premiers de ces dièdres n'ayant pas besoin de définition, et le troisième ayant chacune de ses faces parallèle à deux côtés opposés du quadrilatère A'B'C'D' et son arête parallèle à la droite des milieux des diagonales.

Corollaire. — *Si deux des trois dièdres diagonaux du quadrilatère orthogonal* A′B′C′D′ *sont droits, il en est de même du troisième, et les arêtes opposées du tétraèdre primitif sont perpendiculaires entre elles.*

3. *Les aires des faces du tétraèdre orthogonal* A′B′C′D′ *sont proportionnelles à quatre arêtes consécutives du tétraèdre primitif* ABCD, *et les plans de ces faces sont perpendiculaires à ces arêtes.*

Corollaire. — Deux tétraèdres orthogonaux sont *réciproques*.

4. Problème. — *Les aires des quatre faces étant données, définir le tétraèdre maximum.* (Lagrange.)

Soient ABCD le tétraèdre cherché et A′B′C′D′ son tétraèdre orthogonal. Les aires des faces du premier étant données et son volume étant maximum, les quatre arêtes consécutives A′B′, B′C′, C′D′, D′A′ du second sont aussi données; son volume V′ est maximum (nº **1**); et le problème est ramené à celui-ci, beaucoup plus facile : *Définir le tétraèdre maximum* A′B′C′D′ *parmi tous ceux que l'on peut construire avec quatre arêtes consécutives de longueurs données.* Or, sous ces nouvelles conditions, il devient évident que le tétraèdre maximum A′B′C′D′ est celui dont les *dièdres diagonaux* A′C′, B′D′ sont *droits*. En effet, si le dièdre A′C′ n'était droit, on pourrait, en laissant invariables les triangles A′B′C′ et A′D′C′ dans leurs plans respectifs, amener le plan du second à être perpendiculaire au plan du premier par une rotation effectuée autour de la diagonale fixe A′C′. Par là, la base A′B′C′ du tétraèdre ne changerait point, mais sa hauteur et son volume augmenteraient. Donc, etc. D'ailleurs les dièdres diagonaux du tétraèdre orthogonal A′B′C′D′ étant droits, *les arêtes opposées du tétraèdre primitif* ABCD *sont perpendiculaires entre elles.* Et cette définition géométrique du tétraèdre maximum résulte aussi des équations données par Lagrange.

Si l'on désigne en effet par a, b, c les côtés de la base ABC, et par a', b', c' les arêtes opposées à ces côtés, le tétraèdre maximum est défini, suivant l'illustre géomètre, par ces égalités (*Mémoires de l'Académie de Berlin,* 1773, p. 160)

$$(1) \qquad a^2 - b'^2 - c'^2 = b^2 - c'^2 - a'^2 = c^2 - a'^2 - b'^2,$$

ou, avec moins de symétrie, par les suivantes,

$$(1')\quad a^2 - b^2 = b'^2 - a'^2,\quad b^2 - c^2 = c'^2 - b'^2,\quad c^2 - a^2 = a'^2 - c'^2;$$

et ces dernières expriment, suivant une remarque due à Lhuillier, que, dans le tétraèdre cherché, le pied de chacune des hauteurs sur la face opposée coïncide avec le point de rencontre des hauteurs de cette face (*De Relatione mutua, etc.*, 1782, p. 151). Une seconde interprétation équivalente, mais plus immédiate encore, des équations (1′) est celle-ci: Les perpendiculaires abaissées de deux sommets quelconques du tétraèdre maximum sur l'arête qui réunit les deux autres sommets, coupent cette arête au même point, et par suite les arêtes opposées du tétraèdre maximum sont perpendiculaires entre elles; propriété déjà énoncée par M. Painvin.

5. La notion du tétraèdre orthogonal permet de démontrer simplement ce théorème connu : Le tétraèdre maximum, parmi ceux qui ont la même surface totale, est le tétraèdre régulier.

En effet le périmètre total du quadrilatère conjugué A′B′C′D′ est maintenant donné; et pour que le volume du tétraèdre de même nom soit maximum, il faut d'abord que ses dièdres diagonaux soient droits, comme précédemment; ensuite que ses arêtes consécutives A′B′, B′C′, C′D′, D′A′ soient égales entre elles, cette dernière condition résultant d'une propriété de maximum du triangle isocèle. Les arêtes opposées du tétraèdre primitif ABCD sont donc perpendiculaires entre elles, et toutes ses faces sont *équivalentes*. Or il est aisé de voir que la combinaison de ces deux conditions entraîne successivement l'*égalité* des faces et celle des arêtes, ou la régularité du tétraèdre.

6. De tous les tétraèdres construits sur une base donnée et de même surface totale, le tétraèdre maximum est celui dont les faces latérales sont également inclinées sur la base : théorème dû à Lhuillier, et dont la démonstration est également facile par l'analyse ou la géométrie. Il en résulte, par l'emploi du tétraèdre orthogonal, cet autre théorème : De tous les quadrilatères gauches construits sur un côté donné et sous un périmètre total également donné, celui qui donne

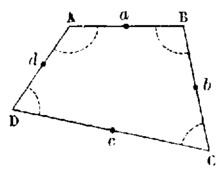
naissance à un tétraèdre maximum est tel, que les trois côtés libres b, c, d, soient également inclinés sur le côté donné a.

II.

1. L'équation générale des surfaces du second degré S_2, tangentes aux quatre côtés d'un quadrilatère gauche ABCD, est

$$(aA + bB + cC + dD)^2 + \lambda.AC + \mu.BD = 0, \tag{1}$$

Fig. 1.



a, b, c, d, λ, μ désignant six paramètres arbitraires, et les plans des quatre angles A, B, C, D du quadrilatère étant représentés par les équations

$$0 = A = B = C = D.$$

Si l'on cherche en effet les traces du côté AB ($A = 0$, $B = 0$) sur la surface (1), on trouve deux traces confondues en une seule :

$$A = 0, \quad B = 0, \quad (cC + dD)^2 = 0.$$

Chacun des côtés du quadrilatère est donc tangent à la surface (1), et celle-ci renferme en outre le nombre convenable de paramètres arbitraires.

D'ailleurs le point de contact a du côté AB étant défini par les équations simultanées

$$A = 0, \quad B = 0, \quad cC + dD = 0,$$

ce point appartient au plan

$$aA + bB + cC + dD = 0; \tag{2}$$

il en est de même des points de contact b, c, d des autres côtés du quadrilatère; et l'on voit que : *Dans tout quadrilatère gauche circonscrit à une surface du second degré, les points de contact des côtés appartiennent à un même plan.*

Le théorème segmentaire de Newton, et celui de Carnot sur les polygones gauches coupés par un plan transversal, conduisent aisément au même résultat; c'est même ainsi que cette proposition, qui nous avait paru nouvelle, a été établie d'abord par Brianchon. (Voir *Propriétés projectives.*)

2. Considérons l'hyperboloïde à une nappe représenté par l'équation

$$\lambda.\mathrm{AC} + \mu.\mathrm{BD} = 0. \tag{3}$$

Cet hyperboloïde, comme on sait, passe par les quatre côtés du quadrilatère gauche ABCD; et il résulte, de la forme des équations (1) et (3), qu'il est circonscrit à la surface (1) suivant la courbe (2). On pourra donc mener, par chaque point m de cette courbe, une génératrice du second système de l'hyperboloïde, tangente en m à la surface (1), s'appuyant sur les deux génératrices fixes AB, CD du premier système, et déterminant dès lors, sur celles-ci, des divisions homographiques.

De là, en considérant les génératrices de l'hyperboloïde sous un autre point de vue, et les regardant comme celles des tangentes à la surface (1) qui s'appuient sur les deux tangentes fixes AB, CD de cette même surface, on déduit ce théorème :

Étant données deux tangentes fixes d'une surface du second degré, les tangentes de cette surface qui rencontrent les deux premières, déterminent sur celles-ci deux divisions homographiques; leurs points de contact sur la surface sont distribués sur une courbe plane, et ces droites sont les génératrices d'un hyperboloïde circonscrit à la proposée.

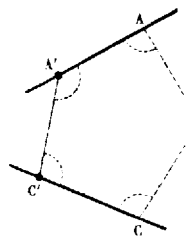
Remarque. — Étant données les deux tangentes fixes AB, CD, si l'on prend un point quelconque A de l'une d'elles pour sommet d'un cône circonscrit à la surface, et que l'on construise les traces de la seconde tangente CD sur ce cône : l'on aura, en général, deux traces

D, D'; et, par suite aussi, deux droites distinctes AD, AD', s'appuyant sur les deux directrices données, et tangentes à la surface. Dès lors, si le point A se meut sur la directrice AB, les deux droites AD, AD' engendreront deux hyperboloïdes distincts, circonscrits à la surface proposée suivant deux courbes distinctes. C'est ce qui résultera d'ailleurs, avec plus de clarté, du calcul suivant.

3. Problème. — *Étant données deux tangentes* AA', CC', *d'une surface du second degré, trouver la surface engendrée par une droite qui se meut en demeurant tangente à la surface donnée, et s'appuyant toujours sur les deux tangentes données.*

Chacune des deux tangentes données AA', CC' devant être définie par deux plans, nous ferons passer, par AA', un plan quelconque $A = 0$;

Fig. 2.



par CC', un plan quelconque $C = 0$; et, pour les deux autres plans nécessaires à la détermination de ces droites, nous choisirons les plans $A' = 0$, $C' = 0$, menés par chacune d'elles et par la droite A'C' qui réunit leurs points de contact sur la surface, dont l'équation est dès lors

$$A(cC + c'C') + A'(\gamma C + \gamma' C') + \lambda A'^2 + \mu C'^2 = 0. \tag{1}$$

Une droite quelconque, s'appuyant sur les deux directrices données, sera représentée par les équations

$$\left\{ \begin{array}{l} A = mA', \\ C = nC', \end{array} \right. \tag{2}$$

et l'élimination des fonctions A et C entre (1) et (2) conduit à l'équation

$$(3) \qquad \lambda A'^2 + A'C'[m(nc + c') + n\gamma + \gamma'] + \mu C'^2 = 0,$$

dont le premier membre sera un carré parfait en A' et C', si la droite (2) est tangente à la surface (1). Les paramètres variables m et n des équations de la génératrice mobile sont donc liés par la relation

$$(4) \qquad cmn + c'm + \gamma n + \gamma' = \pm \sqrt{\lambda\mu},$$

et l'élimination de ces paramètres entre (2) et (4) donne

$$c\,AC + c'AC' + \gamma CA' + \gamma' A'C' = \pm\, 2A'C'\sqrt{\lambda\mu}$$

ou

$$(5) \qquad A(cC + c'C') + A'(\gamma C + \gamma' C') \pm 2A'C'\sqrt{\lambda\mu} = 0$$

pour équation de la surface cherchée. Cette surface se compose donc du système de deux hyperboloïdes, circonscrits l'un et l'autre à la surface proposée suivant deux courbes de contact, dont les plans se coupent suivant la droite A'C'.

Remarque. — Il résulte, de ce dédoublement de la surface totale en deux hyperboloïdes, que le théorème du n° **1** n'est pas vrai d'une manière absolue. Ainsi, le quadrilatère gauche ABCD étant circonscrit à une surface du second degré, le point de contact du quatrième côté AD appartiendra ou non au plan mené par les points de contact des trois premiers côtés, suivant que les côtés opposés AD et BC seront deux génératrices d'un même hyperboloïde, ou des génératrices de l'un et de l'autre hyperboloïdes. Mais si le dernier cas a lieu, l'on pourra toujours fermer le quadrilatère gauche par une quatrième tangente AD', issue du point A, et dont le point de contact d' appartiendra nécessairement au plan déterminé par les points de contact des trois premiers côtés.

4. Le théorème **1**, ainsi rectifié, pourrait être pris pour point de départ dans l'étude des polygones gauches circonscrits à une surface du second degré. Nous nous bornerons, sur ce point, à énoncer les deux propositions suivantes :

1° Si les points de contact des côtés d'un polygone *impair*, circonscrit à une surface du second degré, appartiennent à un même plan, le polygone lui-même est plan.

2° Si les points de contact des côtés d'un polygone de $4m+2$ sommets, circonscrit à une surface du second degré, appartiennent à un même plan : les diagonales qui réunissent les sommets opposés de ce polygone se coupent en un même point.

III.

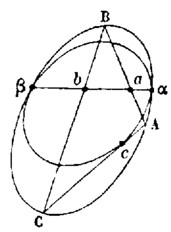
1. *Lemme I.* — Deux courbes quelconques ayant un point commun α, et même tangente en ce point; soit AC une corde variable de la courbe extérieure, tangente en c à la courbe intérieure, et se rapprochant indéfiniment de la tangente commune aux deux courbes : l'on aura, à la limite,

$$\frac{\overline{\mathrm{AC}}^2}{4\,\mathrm{A}c.\,\mathrm{C}c} = \frac{\mathrm{R}}{r},$$

R et r désignant les rayons de courbure, en α, de la ligne enveloppante et de la ligne enveloppée.

2. *Lemme II.* — Soient (C_2) une courbe quelconque du second

Fig. 3.



degré; ABC un triangle pivotant inscrit dans cette courbe; (c_2) la conique, enveloppe du côté libre AC de ce triangle, et doublement tangente à la première aux extrémités α, β de la corde ab des pivots : si l'on désigne par m le rapport anharmonique des quatre points a, b, α, β,

$$\frac{a\alpha.\,b\beta}{a\beta.\,b\alpha} = m,$$

on aura

$$\frac{\mathrm{R}}{r} = \frac{(m+1)^2}{4m} \tag{1}$$

pour le rapport des rayons de courbure des deux lignes, en l'un quelconque de leurs points de contact α ou β.

On a, en effet,

$$\lim \frac{\mathrm{A}c}{\mathrm{C}c} = \lim \frac{\mathrm{B}b.\mathrm{A}a}{\mathrm{C}b.\mathrm{B}a} = \frac{a\alpha.b\beta}{a\beta.b\alpha} = m;$$

et, par suite, ε désignant un infiniment petit,

$$\frac{\mathrm{A}c}{\mathrm{C}c} = m + \varepsilon.$$

On déduit de là

$$\mathrm{AC} = \mathrm{C}c(m + 1 + \varepsilon), \quad \mathrm{AC} = \mathrm{A}c\,\frac{m+1+\varepsilon}{m+\varepsilon},$$

et enfin

$$\lim \frac{\overline{\mathrm{AC}}^2}{4\,\mathrm{A}c.\mathrm{C}c} = \frac{(m+1)^2}{4m} = \frac{\mathrm{R}}{r},$$

d'après le lemme I.

3. Théorème I. — *L'enveloppe du côté libre d'un triangle pivotant inscrit dans une surface du second degré* S, *est une autre surface du même degré; les deux surfaces ont un double contact suivant la corde* ab *des pivots, et leurs* indicatrices *aux extrémités* α *et* β *de cette corde sont des courbes semblables*. De telle sorte que si la première surface est sphérique, les points α et β seront des ombilics de la seconde.

Il est d'abord évident qu'un plan quelconque, mené suivant la droite ab ou $\alpha\beta$ des pivots, coupe la surface enveloppe suivant une courbe du second degré $\alpha c\beta$; et que cette courbe est doublement tangente, aux points α et β, à la section ACB déterminée par ce même plan dans la surface donnée.

Pour établir, en second lieu, que toutes les courbes $\alpha c\beta$ appartiennent à une même surface du second degré; considérons trois de ces courbes $\alpha c\beta$, $\alpha c'\beta$, $\alpha c''\beta$, correspondantes aux trois sections $\alpha\mathrm{C}\beta$, $\alpha\mathrm{C}'\beta$, $\alpha\mathrm{C}''\beta$ de la surface donnée S; et la surface du second degré Σ

assujettie à passer par les deux premières courbes et par un point c'' de la troisième. Cette surface Σ se trouve ainsi entièrement déterminée; ses plans tangents aux points α, β coïncident avec ceux de la surface S aux mêmes points; et sa section par le plan $\alpha c''\beta$ est une conique qui passe par les trois points α, β, c'', et dont les tangentes en α, β coïncident avec les tangentes aux mêmes points de la troisième courbe $\alpha c''\beta$. Cette section n'est donc autre chose que la courbe $\alpha c''\beta$ elle-même. Ceci posé, considérons les deux surfaces S, Σ, et leurs *indicatrices* au point commun α : deux ellipses ayant pour centre commun le point α, situées dans le plan tangent commun en ce point, et dont les carrés des diamètres *correspondants* représentent les rayons de courbure des sections normales des deux surfaces.

En vertu du théorème de Meunier, le rapport des rayons de courbure en α des sections obliques $\alpha C\beta$ et $\alpha c\beta$, $\alpha C'\beta$ et $\alpha c'\beta$, $\alpha C''\beta$ et $\alpha c''\beta$ des deux surfaces, sera le même que celui des sections normales correspondantes. Mais les trois premiers rapports sont égaux, suivant le lemme II, et leur valeur commune est

$$\frac{R}{r} = \frac{(m+1)^2}{4m}.$$

L'indicatrice en α de la première surface a donc *trois* de ses diamètres proportionnels aux trois diamètres *correspondants* de l'indicatrice de la seconde surface; et *les deux indicatrices sont des courbes homothétiques* .Or, ce résultat suffit pour établir que toutes les courbes $\alpha c\beta$, en nombre infini, appartiennent à une même surface du second degré. En effet, Σ étant toujours la surface déterminée par les trois courbes $\alpha c\beta$, $\alpha c'\beta$, $\alpha c''\beta$; soit Σ_1 la surface déterminée par une quatrième courbe $\alpha c_1\beta$, et deux des précédentes $\alpha c'\beta$, $\alpha c''\beta$. Cette nouvelle surface Σ_1 et la proposée S auront encore même plan tangent en α, et leurs indicatrices en ce point seront homothétiques, ainsi dès lors que les indicatrices des deux surfaces Σ et Σ_1. Mais ces dernières indicatrices ont déjà deux points communs, à savoir, les extrémités des diamètres correspondants aux deux courbes planes $\alpha c'\beta$, $\alpha c''\beta$, communes aux deux surfaces Σ, Σ_1; donc *celles-ci*, considérées au point α, *ont la même indicatrice;* et *un plan quelconque,* mené par ce point, *les coupe suivant deux courbes osculatrices.* Dès lors les sections des deux surfaces

Σ, Σ_1 par un plan quelconque, mené suivant la droite $\alpha\beta$ des pivots, ont les deux points communs α et β, même tangente et même rayon de courbure en chacun de ces points; donc toutes ces sections coïncident : et toutes les surfaces Σ, Σ_1, ..., que l'on avait supposées distinctes, se confondent.

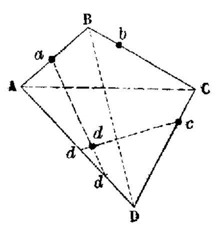
4. *Lemme III.* — Si *les pôles a, b* des deux premiers côtés AB, BC du triangle pivotant ABC *sont deux points conjugués* par rapport à la surface circonscrite; *le côté libre* AC *glisse sur deux droites fixes* : la droite ab des pivots et la polaire $a'b'$ de cette droite.

En effet, l'enveloppe du côté libre AC, considérée dans chacun des plans menés suivant la droite ab, se réduit à un point : le pôle c de la droite des pivots ab. Et tous ces pôles c sont distribués sur la polaire $a'b'$ de la droite ab.

5. Théorème II. — *Si les trois premiers côtés d'un quadrilatère gauche, inscrit à une surface du second degré, tournent autour de trois points fixes,* conjugués harmoniquement deux à deux, *par rapport à la surface : le côté libre du quadrilatère mobile tourne de même autour d'un point fixe; et les pôles des quatre côtés sont les sommets d'un tétraèdre* conjugué.

Soient, en effet a, b, c, d les sommets d'un tétraèdre conjugué, et

Fig. 4.



a, b, c les points fixes sur lesquels tournent les trois premiers côtés AB, BC, CD du quadrilatère gauche ABCD. Menons la diagonale AC. Les deux premiers côtés du triangle ABC tournant sur deux points *conjugués a* et b; le côté libre de ce triangle, ou la diagonale AC, s'appuie constamment, d'après le lemme III, sur la polaire de la droite

ab, c'est-à-dire sur l'arête cd du tétraèdre. Les deux droites AC et cd étant toujours dans un même plan, il en est de même des deux droites AD et cd : et le côté libre du quadrilatère variable s'appuie constamment sur l'arête cd. On verrait de même, en menant la diagonale BD, que BD et ad sont toujours dans un même plan; qu'il en est encore ainsi de AD et de ad, et que le côté libre AD du quadrilatère s'appuie constamment sur l'arête ad. Donc le côté libre AD s'appuie constamment sur les deux arêtes ad et cd. D'ailleurs le côté libre ne peut se mouvoir dans le plan adc, puisque, dans ce cas, AB et DC appartiendraient à ce plan, ainsi que la droite BC, ainsi que le point b, ce qui n'est pas. Donc le côté libre AD rencontre les arêtes ad, cd au même point d, et tourne ainsi sur le point d.

6. L'analogie des théorèmes I et II avec quelques-unes des propositions bien connues que l'on doit à M. Poncelet, semblerait devoir se prolonger au delà, et l'on pourrait très-vraisemblablement conclure de ce qui précède que « l'enveloppe du côté libre d'un polygone gauche pivotant, inscrit dans une surface du second degré, est une autre surface du second degré. » La conclusion pourtant serait fausse, et le problème général des polygones pivotants, inscrits dans une surface du second degré, paraît devoir être restreint, quant à l'unité des résultats, soit aux cas particuliers que nous avons déjà examinés, soit à d'autres cas où l'on établirait des dépendances convenables entre les points fixes autour desquels doivent tourner les premiers côtés du polygone. L'on trouve, en effet, en laissant ces points fixes indépendants les uns des autres, que les côtés libres n'admettent plus une commune définition comme précédemment; mais qu'ils se partagent en une infinité de séries telles que les côtés d'une même série demeurent tangents à une même surface du second degré, cette surface variant d'ailleurs d'une série à l'autre.

Quant aux cas particuliers auxquels nous avons fait allusion, ils sont évidemment susceptibles d'une très-grande variété. Nous citerons pour exemple le cas d'un pentagone gauche dont les quatre premiers côtés tournent sur quatre points situés dans un même plan, et dont le côté libre enveloppe une surface du second degré.

IV.

1. Problème. — *Étant donnés une surface du second degré et un point fixe* O, *l'on conçoit, menées par ce point, trois portions de cordes rectangulaires* OA, OB, OC, *terminées à la surface, et les plans tangents à celle-ci menés par les extrémités de ces cordes : le point de concours de ces plans tangents décrit une surface qu'il s'agit de déterminer.*

Soient

$$(1)\qquad Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Cx + 2C'y + 2C''z + D = 0,$$

la surface donnée rapportée à trois axes rectangulaires menés par le point fixe O;

$$(2)\qquad z = ax + by + c,$$

le plan ABC passant par les extrémités des trois cordes rectangulaires OA, OB, OC, et

$$(3)\ \begin{cases} c^2(Ax^2 + A'y^2 + A''z^2) + 2c(z - ax - by)(Cx + C'y + C''z) \\ \qquad + D(z - ax - by)^2 = 0, \end{cases}$$

l'équation du cône *auxiliaire* ayant pour sommet le point O, et pour base la trace du plan ABC sur la surface.

Les trois génératrices particulières OA, OB, OC de ce cône, formant un système rectangulaire, la somme algébrique des coefficients des carrés des variables doit être nulle dans l'équation (3), et l'on a

$$c^2(A + A' + A'') - 2c(Ca + C'b - C'') + D(a^2 + b^2 + 1) = 0,$$

ou

$$(4)\quad D(a^2 + b^2) + (A + A' + A'')c^2 - 2C.ac - 2C'.bc + 2C''.c + D = 0.$$

C'est la relation existant entre les paramètres variables a, b, c qui figurent dans l'équation du plan ABC. D'ailleurs ce plan ABC n'est autre chose que le plan polaire d'un point du lieu cherché, et cette relation est du second degré en a, b, c. Donc la surface cherchée est elle-même du second degré.

2. Si l'on remarque maintenant que chacune des trois cordes rectangulaires OA, OB, OC coupe la surface en deux points, et si l'on combine de toutes les manières possibles les plans tangents menés par des points qui appartiennent à trois cordes distinctes, on obtient ce théorème :

Si trois cordes rectangulaires d'un ellipsoïde tournent autour d'un même point fixe, les six plans tangents menés à l'ellipsoïde par les extrémités de ces cordes déterminent un hexaèdre *variable*, à faces quadrilatères; *cet hexaèdre, dans son mouvement, reste toujours* circonscrit *à l'ellipsoïde donné et* inscrit *à un second ellipsoïde déterminé; et les diagonales qui réunissent ses sommets opposés se croisent au même point.*

Cette proposition offre un premier exemple d'un polyèdre variable simultanément inscrit et circonscrit à deux surfaces fixes du second degré. M. Prouhet en a trouvé de son côté plusieurs autres, consignés dans un Mémoire considérable que des raisons particulières l'empêchent de publier encore.

V.

1. Si l'on désigne par a, b, c trois paramètres indéterminés, et par

$$A = 0,\ A' = 0;\quad B = 0,\ B' = 0;\quad C = 0,\ C' = 0$$

les faces opposées d'un hexaèdre à faces quadrilatères; l'équation générale des surfaces du second degré circonscrites à cet hexaèdre est

$$\frac{A.A'}{a} + \frac{B.B'}{b} + \frac{C.C'}{c} = 0, \tag{1}$$

comme on le voit immédiatement. Rapprochée de l'équation connue

$$\frac{A.A'}{a} + \frac{B.B'}{b} = 0, \tag{1}$$

des courbes du second degré circonscrites à un quadrilatère, elle montre que la figure de l'espace susceptible d'offrir des propriétés analogues à celles du quadrilatère inscrit à une conique est, au moins à certains égards, l'hexaèdre à faces quadrilatères inscrit à une surface de second ordre; et cette observation pourra peut-être s'utiliser. Mais l'équation (1) présente une anomalie tout à fait imprévue, et dont la seule constatation fournit un théorème intéressant.

On sait, en effet, qu'une surface du second ordre est, en général, déterminée par la donnée de neuf points; de telle sorte que, après avoir exprimé qu'une pareille surface passe par *huit* points donnés, l'équation obtenue, rendue homogène par rapport aux paramètres indéterminés, ne doit plus contenir que *deux* de ces paramètres. Or ici la surface (1) est déjà assujettie à passer par *huit* points donnés, les huit sommets de l'hexaèdre; mais son équation contient encore *trois* paramètres indéterminés et que l'on pourra particulariser de manière que la surface contienne deux nouveaux points choisis arbitrairement dans l'espace. Il faut donc que la donnée géométrique des huit premiers points se traduise analytiquement par *huit* conditions *réductibles à sept*, et cette réduction, nécessaire, se traduit à son tour par ce théorème curieux : *Toute surface de second ordre passant par les sept premiers sommets d'un hexaèdre octogonal, passe aussi par le huitième.*

2. On peut d'ailleurs vérifier directement la proposition de la manière suivante :

Soient *abcd*, $a'b'c'd'$ deux faces opposées de l'hexaèdre octogonal, et d' le sommet qui n'est pas donné comme appartenant à la surface S. Les faces *abcd*, $a'b'c'd'$ se coupant dans une droite DD′, soient 1, 2, 3, 4 les traces des côtés *ab*, *bc*, *cd*, *da* sur la droite DD′, et 5, 6, les traces de cette droite elle-même sur la surface. Les points 1, 2, 3, 4, seront aussi les traces des côtés $a'b'$, $b'c'$, $c'd'$, $d'a'$ sur la droite DD′, et les points 5, 6 représenteront aussi les communes traces de la droite DD′ sur les coniques *abcd*, $a'b'c'$, déterminées dans la surface par les plans des deux faces considérées.

Cela posé, *les points* 1, 2, 3, 4, 5, 6, considérés comme appartenant au plan de la face *abcd*, *sont les traces d'une même droite* DD′ *sur une* *conique abcd et sur les côtés d'un quadrilatère inscrit.* Les points 1, 2, 3, 4, 5, 6 *sont* donc *en involution.* Mais ces six points appartiennent aussi au plan $a'b'c'd'$, et ne sont autres, dans ce plan, que les traces d'une même droite DD' sur une courbe du second degré $a'b'c'$ et sur les côtés d'un quadrilatère $a'b'c'd'$ dont les trois premiers sommets appartiennent à cette courbe; ils sont de plus en involution; donc le dernier sommet du quadrilatère appartient à la courbe, et le dernier sommet de l'hexaèdre à la surface.

3. Une autre démonstration purement descriptive est celle-ci : Que l'on imagine le quadrilatère gauche ABCD formé par les intersections successives des arêtes latérales aa', bb', cc', dd' de l'hexaèdre précédent; et l'hyperboloïde H passant par les quatre côtés de ce quadrilatère, et par un *neuvième* point α situé sur la section de la surface S par le plan *abcd*. Cet hyperboloïde est entièrement déterminé, et son intersection avec la surface proposée est un système de deux courbes planes. La première, $abcd\alpha$, en vertu de la définition de l'hyperbole, et le plan de la seconde coïncidant avec le plan des trois points a', b', c', communs aussi aux deux surfaces. D'ailleurs la trace de l'hyperboloïde sur le plan $a'b'c'$ passe aussi par le point d'. Donc, etc.

VI.

1. « Toute surface du second degré qui se trouve tangente aux sept premières faces d'un *octaèdre hexagonal* est aussi tangente à la huitième. » C'est le théorème corrélatif du précédent. Il en résulte que le lieu des centres des surfaces du second degré inscrites à un pareil octaèdre, est le même que le lieu analogue pour les surfaces tangentes à sept plans donnés; c'est-à-dire un plan, comme l'on sait. On ne sait rien, il est vrai, sur la construction générale, probablement très-compliquée, de ce plan au moyen des sept plans donnés; mais nous allons voir que cette construction est infiniment simple dans le cas particulier des surfaces inscrites à un octaèdre.

2. Considérons, en effet, un *octaèdre hexagonal* quelconque et ses trois *quadrilatères gauches diagonaux;* chacun de ceux-ci ayant pour côtés quatre arêtes consécutives de l'octaèdre, et *séparant* deux de ses sommets opposés. Imaginons, en outre, les trois séries d'hyperboloïdes passant par les côtés de chacun de ces trois quadrilatères. Comme tout plan mené par une génératrice rectiligne d'un hyperboloïde est tangent à la surface en quelque point de cette génératrice, tous ces hyperboloïdes se trouveront tangents aux huit faces de l'octaèdre; et les trois lieux de leurs centres appartiendront au plan général des centres. Mais on sait que *la droite qui réunit les milieux des diagonales d'un quadrilatère gauche est le lieu des centres des hyperboloïdes passant par les côtés de ce quadrilatère*. Donc ici la droite des milieux des diagonales, relative à chacun des trois quadrilatères diagonaux, appartient au plan général des centres. D'ailleurs les diagonales des quadrilatères diagonaux ne sont autres que les diagonales mêmes de l'octaèdre; et l'on en conclut que *le lieu des centres des surfaces du second degré inscrites à un octaèdre hexagonal quelconque, est le plan mené par les milieux de ses diagonales*. Proposition analogue au théorème de Newton sur le lieu des centres des coniques inscrites à un quadrilatère plan.

VII.

1. Le théorème du § V est implicitement compris dans la proposition suivante, aussi belle que générale, et que l'on doit à M. Otto Hesse : « Toute surface du second degré, passant par les sept premiers sommets de deux tétraèdres isolément conjugués par rapport à une surface également du second degré, passe aussi par le huitième. En outre, sept points, donnés arbitrairement dans l'espace, étant considérés comme formant les sept premiers sommets de deux tétraèdres isolément conjugués par rapport à une surface du second degré, inconnue de forme et de position : cette surface et le huitième sommet sont déterminés. » Les calculs, à l'aide desquels le célèbre géomètre établit ce théorème, paraissent compliqués, au moins pour les lecteurs peu familiers à la nouvelle analyse. Mais on peut, en reprenant en sens inverse le chemin de l'auteur, le ramener, comme il suit, à l'analyse vulgaire.

2. Soient

$$\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}+\frac{z^2}{c}=t^2 \tag{1}$$

une surface du second degré, S_2, rapportée aux quatre faces du tétraèdre de référence

$$o = x = y = z = t,$$

et

$$\frac{xx'}{a} + \frac{yy'}{b} + \frac{zz'}{b} = tt' \tag{2}$$

le plan polaire du point $(x'y'z't')$ par rapport à la surface (1). Il résulte immédiatement de l'équation (2) que le tétraèdre de référence $(xyzt)$ est *conjugué* par rapport à la surface (1).

3. Soient, en outre,

$$(p)\qquad \begin{cases} P \quad \text{ou} \quad A\,x + B\,y + C\,z - t = o, \\ P_1 \quad \text{ou} \quad A_1 x + B_1 y + C_1 z - t = o, \\ P_2 \quad \text{ou} \quad A_2 x + \ldots\ldots\ldots = o, \\ P_3 \quad \text{ou} \quad A_3 x + \ldots\ldots\ldots = o, \end{cases}$$

les faces d'un second tétraèdre *conjugué* relativement à la même surface.

Identifiant d'abord l'équation P et l'équation (2), l'on a

$$x' = aAt', \quad y' = bBt', \quad z' = cCt',$$

pour le pôle $(x'y'z't')$ de la première face P du second tétraèdre; et l'on trouverait de même les pôles des autres faces. D'ailleurs, le pôle de chacune de ces quatre faces doit appartenir aux trois autres, et de là résultent ces *six* équations de condition

1 $$aAA_1 + bBB_1 + cCC_1 = 1,$$

2 $$aAA_2 + bBB_2 + cCC_2 = 1,$$

3 $$aAA_3 + bBB_3 + cCC_3 = 1;$$

4 $$aA_2A_3 + bB_2B_3 + cC_2C_3 = 1,$$

5 $$aA_3A_1 + bB_3B_1 + cC_3C_1 = 1,$$

6 $$aA_1A_2 + bB_1B_2 + cC_1C_2 = 1.$$

4. Soit enfin

$$(3)\qquad m_1 PP_1 + m_2 PP_2 + m_3 PP_3 + \mu_1 P_2P_3 + \mu_2 P_3P_1 + \mu_3 P_1P_2 = 0$$

l'équation d'une surface indéterminée du second degré, circonscrite au second tétraèdre $(PP_1P_2P_3)$, actuellement conjugué par rapport à la surface (1). Pour que la surface (3) passe par trois des quatre sommets du tétraèdre conjugué primitif $(xyzt)$, il faut, en remplaçant dans l'équation (3) les fonctions P par leurs valeurs (p), que trois des quatre carrés x^2, y^2, z^2, t^2 disparaissent d'eux-mêmes de l'équation résultante

$$(3')\qquad \left\{\begin{array}{l} m_1(Ax + By + Cz - t)(A_1x + B_1y + C_1z - t) \\ + m_2(Ax\ldots)(A_2x\ldots) + m_3(Ax\ldots)(A_3x\ldots) \\ + \mu_1(A_2x\ldots)(A_3x\ldots) + \mu_2\ldots + \mu_3\ldots = 0. \end{array}\right.$$

Les six coefficients m_1, m_2, m_3, μ_1, μ_2, μ_3 satisferont donc, par hypothèse, à trois des quatre équations suivantes, obtenues en égalant à zéro les coefficients des termes en x^2, y^2, z^2, t^2 de l'équation (3') :

$$\begin{array}{ll}
(\mathrm{I}) & m_1 AA_1 + m_2 AA_2 + m_3 AA_3 + \mu_1 A_2A_3 + \mu_2 A_3A_1 + \mu_3 A_1A_2 = 0, \\
(\mathrm{II}) & m_1 BB_1 + m_2 BB_2 + m_3 BB_3 + \mu_1 B_2B_3 + \mu_2 B_3B_1 + \mu_3 B_1B_2 = 0, \\
(\mathrm{III}) & m_1 CC_1 + \ldots\ldots\ldots\ldots + \mu_1 C_2C_3 + \ldots\ldots\ldots\ldots = 0, \\
(\mathrm{IV}) & m_1 + m_2 + m_3 + \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = 0.
\end{array}$$

Et la surface (3), qui passe déjà, suivant l'hypothèse, par les quatre sommets du tétraèdre $PP_1P_2P_3$ et par trois des sommets du tétraèdre $xyzt$, passera d'elle-même par le dernier de ces sommets, si l'une quelconque des quatre équations de condition (I), (II), (III), (IV) est une conséquence des trois autres; ce que l'on vérifie aisément.

Des *égalités* 1, 2, 3, 4, 5, 6, respectivement multipliées par les nombres m_1, m_2, m_3, μ_1, μ_2, μ_3, et ajoutées membre à membre, il résulte, en effet, cette nouvelle *égalité*

$$(\mathrm{I})\,a + (\mathrm{II})\,b + (\mathrm{III})\,c = (\mathrm{IV}).$$

Mais trois des quatre termes de celle-ci sont nuls par hypothèse; le quatrième terme est donc nul de lui-même; l'une quelconque des équations (I), (II), (III), (IV) est une conséquence des trois autres, et la première partie du théorème est démontrée.

5. « Le premier tétraèdre $xyzt$ et les trois faces P_1, P_2, P_3 du second tétraèdre étant donnés; la quatrième face P de celui-ci est déterminée, ainsi que la surface du second degré (1), par rapport à laquelle chacun des deux tétraèdres doit être conjugué. »

Les trois faces P_1, P_2, P_3 étant données, les coefficients A_1, B_1, C_1; A_2, B_2, C_2; A_3, B_3, C_3, qui figurent dans les équations de ces faces rapportées au tétraèdre donné $xyzt$, sont des nombres donnés; les six coefficients A, B, C, a, b, c, relatifs à la face P et à la surface (1), demeurant, au contraire, indéterminés ou inconnus. Mais les équations 4, 5, 6 sont linéaires par rapport aux inconnues a, b, c et les déterminent. Les équations 1, 2, 3 où a, b, c ne désignent plus que des nombres connus, sont linéaires encore par rapport aux inconnues restantes A, B, C, et les déterminent. Donc, etc.

6. « Le premier tétraèdre $xyzt$ et les trois premiers sommets p_1, p_2, p_3 du second tétraèdre $pp_1p_2p_3$ étant donnés, le quatrième sommet p de celui-ci et la surface (1) sont déterminés. »

Soient, en effet, X, Y, Z, T et P_1, P_2, P_3 les plans polaires des sommets x (opposé à la face $x = 0$), y, z, t, et p_1, p_2, p_3, par rapport à une surface auxiliaire quelconque du second degré.

Si l'on considère X, Y, Z, T et P_1, P_2, P_3 comme formant les sept premières faces de deux tétraèdres isolément conjugués par rapport à une surface inconnue du second ordre Σ_2, on conclura de ce qui précède que, le premier tétraèdre XYZT étant donné ainsi que les trois faces P_1, P_2, P_3 du second, la quatrième face P de celui-ci et la surface Σ_2 sont déterminées. De là enfin, en revenant à la figure primitive, on verra que le quatrième sommet p du second tétraèdre et la surface (1) se trouvent déterminés, et ne sont autres que le pôle du plan P et la polaire réciproque de la surface Σ_2, par rapport à la surface auxiliaire.

VIII.

1. Les équations les plus générales de quatre droites, menées d'une

manière quelconque par les quatre sommets du tétraèdre

$$o = x_1 = x_2 = x_3 = x_4,$$

étant

$$(D)\quad \begin{cases} D_1, & \dfrac{x_2}{a_{2,1}} = \dfrac{x_3}{a_{3,1}} = \dfrac{x_4}{a_{4,1}}, \\ D_2, & \dfrac{x_1}{a_{1,2}} = \dfrac{x_3}{a_{3,2}} = \dfrac{x_4}{a_{4,2}}, \\ D_3, & \dfrac{x_1}{a_{1,3}} = \dfrac{x_2}{a_{2,3}} = \dfrac{x_4}{a_{4,3}}, \\ D_4, & \dfrac{x_1}{a_{1,4}} = \dfrac{x_2}{a_{2,4}} = \dfrac{x_3}{a_{3,4}}: \end{cases}$$

les droites (D) seront quatre génératrices du même mode de génération d'un hyperboloïde à une nappe, s'il existe entre les douze coefficients $a_{1,2}$ et $a_{2,1}$, $a_{1,3}$ et $a_{3,1}$, ..., les six relations

$$(d)\qquad 1 = \frac{a_{1,2}}{a_{2,1}} = \frac{a_{1,3}}{a_{3,1}} = \ldots = \frac{a_{i,k}}{a_{k,i}}.$$

2. Ces conditions étant remplies, les génératrices du même hyperboloïde, *conjuguées* des premières, c'est-à-dire issues des sommets du même tétraèdre, et appartenant au second mode de génération, seront les suivantes

$$(D')\quad \begin{cases} D'_1, & a_{3,4}x_2 = a_{2,4}x_3 = a_{2,3}x_4, \\ D'_2, & a_{3,4}x_1 = a_{1,4}x_3 = a_{1,3}x_4, \\ D'_3, & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ D'_4, & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{cases}$$

et leurs équations se déduisent des premières (D), en remplaçant, dans celles-ci, les coefficients $a_{1,2}, \ldots$, par les inverses $\frac{1}{a_{3,4}}, \ldots$, des coefficients *opposés* ou *à indices complémentaires* $a_{3,4}, \ldots$.

3. Enfin, les quatre génératrices du second système se confondront avec les génératrices correspondantes du premier; celles-ci, elles-mêmes, seront concourantes, et l'hyperboloïde se réduira à un cône, si l'on a en outre la double égalité

$$(\delta) \qquad a_{1,2}\,a_{3,4} = a_{1,3}\,a_{2,4} = a_{1,4}\,a_{2,3}.$$

La vérification de tous ces énoncés ne présente aucune difficulté, et nous ne nous y arrêterons pas autrement, dans l'ignorance où nous sommes si les équations (D) et (D') n'auraient pas été données déjà. Nous pourrons d'ailleurs, si ces formules paraissent nouvelles, indiquer dans une autre occasion la méthode qui nous y a conduit; et nous nous bornerons, pour le moment, à en présenter quelques applications.

4. Soient $o = x_1 = x_2 = x_3 = x_4$ les faces opposées aux sommets 1, 2, 3, 4 du tétraèdre 1234, les fonctions $x_1, x_2, \ldots$, développées, étant $x\cos\alpha_1 + y\cos\beta_1 + z\cos\gamma_1 - p_1, \ldots$.

Si l'on désigne par $\widehat{a_{1,2}}, \widehat{a_{2,3}}, \ldots$, les dièdres formés par les faces x_1 et x_2, x_2 et $x_3, \ldots$, on trouvera sans peine, pour les quatre *hauteurs* H_1, H_2, H_3, H_4 du tétraèdre, les équations suivantes

$$(\mathrm{H}) \qquad \begin{cases} H_1, & \dfrac{x_2}{\cos\widehat{a_{2,1}}} = \dfrac{x_3}{\cos\widehat{a_{3,1}}} = \dfrac{x_4}{\cos\widehat{a_{4,1}}}, \\ H_2, & \dfrac{x_1}{\cos\widehat{a_{1,2}}} = \dfrac{x_3}{\cos\widehat{a_{3,2}}} = \dfrac{x_4}{\cos\widehat{a_{4,2}}}, \\ H_3, & \ldots\ldots\ldots\ldots, \\ H_4, & \ldots\ldots\ldots\ldots, \end{cases}$$

équations de la même forme que les équations (D). D'ailleurs, les équations de condition (d)

$$1 = \frac{a_{1,2}}{a_{2,1}} = \frac{a_{1,3}}{a_{3,1}} = \ldots,$$

se réduisent ici à des identités, puisque l'on a, identiquement,

$$\cos\widehat{a_{1,2}} = \cos\widehat{a_{2,1}}, \quad .$$

et ainsi des autres. Les quatre hauteurs d'un tétraèdre quelconque forment donc toujours quatre génératrices du même mode de génération d'un hyperboloïde à une nappe, théorème bien connu et que l'on doit à M. Chasles.

5. Mais on peut donner à cette proposition un complément nouveau; et il arrive même ici, par une sorte de hasard rationnel qui devrait s'offrir plus souvent, que, présentée dans toute son étendue, la proposition devient évidente.

Que l'on considère, en effet, en même temps que les quatre génératrices ou les quatre hauteurs précédentes, leurs génératrices *conjuguées*. Les équations de celles-ci seront, d'après le n° **2**,

$$(\mathrm{H}')\quad \left\{\begin{array}{ll} \mathrm{H}'_1, & x_2 \cos\widehat{a_{3,4}} = x_3 \cos\widehat{a_{2,4}} = x_4 \cos\widehat{a_{2,3}}, \\ \mathrm{H}'_2, & x_1 \cos\widehat{a_{3,4}} = x_3 \cos\widehat{a_{1,4}} = x_4 \cos\widehat{a_{1,3}}, \\ \mathrm{H}'_3, & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \mathrm{H}'_4, & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots. \end{array}\right.$$

Or chacune de ces nouvelles droites dépend seulement de l'un des quatre trièdres du tétraèdre proposé; et l'on lit aisément, sur leurs équations, que chacune d'elles est la *droite-hauteur* du trièdre correspondant, ou la commune intersection des trois plans menés, suivant chacune des arêtes du trièdre, perpendiculairement à la face opposée. Il en résulte que « les quatre *droites-hauteurs*, relatives aux quatre trièdres d'un tétraèdre quelconque, et les quatre hauteurs du tétraèdre forment huit génératrices d'un même hyperboloïde » D'ailleurs, et présentée dans ces termes, la proposition est évidente; car il résulte immédiatement, de la définition géométrique des huit droites, que chacune des droites H, ou H′, rencontre toutes les droites H′, ou toutes les droites H.

Remarque. — La plupart des théorèmes analogues énoncés par M. Chasles s'établissent géométriquement de la même manière et deviennent évidents par la juxtaposition, aux quatre droites de l'énoncé, des quatre génératrices conjuguées. Par exemple : « Dans tout tétraèdre circonscrit à une surface du second ordre, les droites unissant chaque sommet au point de contact de la face opposée, sont quatre génératrices, etc. » Les quatre génératrices conjuguées s'obtiendront ici de la manière suivante : on considérera les trois points de contact t_2, t_3, t_4 des faces adjacentes au sommet 1 du tétraèdre; le triangle $T_2\,T_3\,T_4$ circonscrit à la surface, déterminé par le plan de ces trois points; et, dans ce triangle, le point de concours θ_1 des droites joignant chaque sommet au point de contact du côté opposé; la droite qui réunit le sommet 1 du tétraèdre au point θ_1 sera l'une des quatre génératrices auxiliaires, dont l'intervention ramènera le théorème à l'évidence.

6. Les droites (H) et (H′) se confondent, et *les quatre hauteurs du tétraèdre concourent en un même point, si l'on a, suivant la double condition* (δ),

$$(\eta)\qquad \cos\widehat{a_{1,2}}\,.\cos\widehat{a_{3,4}} = \cos\widehat{a_{1,3}}\,.\cos\widehat{a_{2,4}} = \cos\widehat{a_{1,4}}\,.\cos\widehat{a_{2,3}}.$$

Mais ce cas correspond, comme on sait, à l'orthogonalité des arêtes opposées du tétraèdre; et celle-ci, comme on l'a vu dans le § 1er, se traduit directement par cette double égalité :

$$(1)\qquad a^2 - b'^2 - c'^2 = b^2 - c'^2 - a'^2 = c^2 - a'^2 - b'^2,$$

où a, b, c désignent les côtés de la base et a', b', c' les arêtes opposées à ces arêtes. Les équations de condition (1) et (η) sont donc équivalentes.

7. Que l'on imagine, menés par le centre d'une sphère, quatre plans parallèles aux faces du tétraèdre précédent, et huit rayons parallèles aux droites (H) et (H′); les traces sphériques de ces rayons, parallèles à huit génératrices d'un hyperboloïde, seront huit points d'une même conique sphérique. D'ailleurs, les quatre premières traces sont les pôles des quatre côtés d'un quadrilatère sphérique quelconque; les quatre dernières sont les points de rencontre des hauteurs des quatre triangles déterminés par les côtés de ce quadrilatère, pris trois à trois; et l'on a ce théorème : *Dans tout quadrilatère sphérique, les pôles des quatre côtés et les points de rencontre des hauteurs de chacun des*

quatre triangles formés par les côtés du quadrilatère, pris trois à trois, sont huit points d'une même conique sphérique.

Si le rayon grandit indéfiniment, le quadrilatère sphérique se transforme en un quadrilatère plan; les pôles des quatre côtés disparaissent sur *la droite à l'infini*, et les points de rencontre des hauteurs des quatre triangles se trouvent distribués sur une seconde droite. Dans le cas enfin où les diagonales du quadrilatère sphérique sont égales à un quadrant, les huit points se réduisent à quatre; et les points de rencontre des hauteurs des quatre triangles se confondent avec les pôles des quatre côtés.

8. Si l'on appelle *médiane* d'un trièdre la commune intersection des trois plans menés par chacune de ses arêtes et par la bissectrice de la face opposée, on verra encore que: *Les quatre médianes déterminées par les quatre trièdres d'un tétraèdre quelconque sont quatre génératrices d'un même hyperboloïde; qu'il en est de même des quatre droites unissant chaque sommet du tétraèdre au centre du cercle inscrit dans la face opposée, et que ces huit droites appartiennent au même hyperboloïde.*

On trouve, en effet, pour les quatre premières droites,

$$(\mathrm{M})\qquad \left\{\begin{array}{ll} \mathrm{M}_1, & x_2 \sin\widehat{a_{3,4}} = x_3 \sin\widehat{a_{2,4}} = x_4 \sin\widehat{a_{2,3}}, \\ \mathrm{M}_2, & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \mathrm{M}_2, & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \mathrm{M}_4, & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{array}\right.$$

et pour les quatre dernières,

$$(\mathrm{M}')\qquad \left\{\begin{array}{ll} \mathrm{M}'_1, & \dfrac{x_2}{\sin\widehat{a_{2,1}}} = \dfrac{x_3}{\sin\widehat{a_{3,1}}} = \dfrac{x_4}{\sin\widehat{a_{4,1}}}, \\ \mathrm{M}'_2, & \ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \mathrm{M}'_3, & \ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \mathrm{M}'_4, & \ldots\ldots\ldots\ldots: \end{array}\right.$$

les huit droites se réduisant à quatre, et ces quatre droites concourant en un même point, si l'on a

$$(m)\qquad \sin\widehat{a_{1,2}}.\sin\widehat{a_{3,4}} = \sin\widehat{a_{1,3}}.\sin\widehat{a_{2,4}} = \sin\widehat{a_{1,4}}.\sin\widehat{a_{2,3}}.$$

IX.

1. La représentation analytique de quatre génératrices d'un hyperboloïde, qui résulte des équations (D) du paragraphe précédent, suppose ces quatre droites menées par les sommets du tétraèdre de référence

$$0 = x_1 = x_2 = x_3 = x_4.$$

Mais quatre génératrices d'une pareille surface peuvent être définies autrement, et, au lieu de passer respectivement par les quatre points d'un certain tétraèdre, être situées une à une dans chacun des plans de ses quatre faces. Il ne sera donc pas inutile, pour compléter cette étude, de former les équations qui répondent à cette seconde définition.

Or les équations les plus générales de quatre droites situées respectivement, et d'une manière quelconque, dans les quatre faces du tétraèdre $0 = x_1 = x_2 = x_3 = x_4$, étant

$$(\Delta)\qquad \left\{\begin{array}{llll} x_1 = 0, & \text{et} & a_{1,2}x_2 + a_{1,3}x_3 + a_{1,4}x_4 = 0, & \Delta_1, \\ x_2 = 0, & \text{et} & a_{2,1}x_1 + a_{2,3}x_3 + a_{2,4}x_4 = 0, & \Delta_2, \\ x_3 = 0, & \text{et} & a_{3,1}x_1 + a_{3,2}x_2 + a_{3,4}x_4 = 0, & \Delta_3, \\ x_4 = 0, & \text{et} & a_{4,1}x_1 + a_{4,2}x_2 + a_{4,3}x_3 = 0, & \Delta_4 : \end{array}\right.$$

ces droites seront quatre génératrices du même mode de génération d'un hyperboloïde, si l'on a les six relations

$$(\delta)\qquad 1 = \frac{a_{1,2}}{a_{2,1}} = \frac{a_{1,3}}{a_{3,1}} = \ldots = \frac{a_{i,k}}{a_{k,i}}.$$

2. D'ailleurs, ces conditions étant remplies, les quatre génératrices du même hyperboloïde, *conjuguées* des premières, c'est-à-dire situées dans les faces du même tétraèdre et appartenant au second mode de génération, seront les suivantes :

$$(\Delta') \quad \begin{cases} x_1 = 0, & \text{et} \quad \dfrac{x_2}{a_{3,4}} + \dfrac{x_3}{a_{2,4}} + \dfrac{x_4}{a_{2,3}} = 0, \quad \Delta'_1, \\ x_2 = 0, & \text{et} \quad \dfrac{x_1}{a_{3,4}} + \dfrac{x_3}{a_{1,4}} + \dfrac{x_4}{a_{1,3}} = 0, \quad \Delta'_2, \\ x_3 = 0, & \text{et} \quad \dfrac{x_1}{a_{2,4}} + \ldots\ldots = 0, \quad \Delta'_3, \\ x_4 = 0, & \quad \ldots\ldots\ldots\ldots, \quad \Delta'_4 \text{ [*]}. \end{cases}$$

3. Enfin ces huit droites se réduiront à quatre, et ces quatre droites concourront en un même point, si l'on a la double égalité

$$(\delta') \qquad a_{1,2} \cdot a_{3,4} = a_{1,3} \cdot a_{2,4} = a_{1,4} \cdot a_{2,3}.$$

4. *Application.* Théorème. Si les huit faces x_1, X_1 ; x_2, X_2 ; x_3, X_3, x_4, X_4 de deux tétraèdres se coupent deux à deux suivant quatre génératrices du même mode de génération d'un hyperboloïde ; les droites réunissant les sommets homologues des deux tétraèdres seront aussi quatre génératrices d'un second hyperboloïde. Réciproquement, si les droites qui joignent les sommets homologues de deux tétraèdres sont quatre génératrices d'un hyperboloïde ; les droites, intersections des faces homologues des deux tétraèdres, sont aussi quatre génératrices d'un second hyperboloïde (*Cayley*).

La doctrine des polaires réciproques permet de passer de l'une de ces propositions à l'autre, et nous nous bornerons, dès lors, à établir la proposition directe.

Soient, à cet effet,

$$(x) \qquad 0 = x_1 = x_2 = x_3 = x_4,$$

[*] Ces nouvelles équations se formant des premières en remplaçant dans celles-ci chacun des coefficients $a_{1,2}, \ldots$, par l'inverse $\dfrac{1}{a_{3,4}}$ du coefficient à indices complémentaires $a_{3,4}$.

les faces du premier tétraèdre, et

$$(X)\qquad\begin{cases} o = X_1 = a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + a_{1,3}x_3 + a_{1,4}x_4,\\ o = X_2 = a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + a_{2,3}x_3 + a_{2,4}x_4,\\ o = X_3 = a_{3,1}x_1 + a_{3,2}x_2 + a_{3,3}x_3 + a_{3,4}x_4,\\ o = X_4 = a_{4,1}x_1 + a_{4,2}x_2 + a_{4,3}x_3 + a_{4,4}x_4,\end{cases}$$

les faces homologues du second. Les droites Δ_1, Δ_2, intersections des faces homologues x_1 et X_1, x_2 et $X_2, \ldots$, ont pour équations

$$(\Delta)\qquad\begin{cases} x_1 = o, & \text{et} \quad a_{1,2}x_2 + a_{1,3}x_3 + a_{1,4}x_4 = o, & \Delta_1,\\ x_2 = o, & \text{et} \quad a_{2,1}x_1 + a_{2,3}x_3 + a_{2,4}x_4 = o, & \Delta_2,\\ x_3 = o, & \quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, & \Delta_3,\\ x_4 = o, & \quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, & \Delta_4;\end{cases}$$

et puisque ces droites, par hypothèse, sont quatre génératrices d'un hyperboloïde, l'on a, d'après le paragraphe précédent, entre les coefficients des équations (X), les six relations

$$(\delta)\qquad \mathrm{I} = \frac{a_{1,2}}{a_{2,1}} = \frac{a_{1,3}}{a_{3,1}} = \ldots = \frac{a_{i,k}}{a_{k,i}}.$$

Cela posé, cherchons d'abord les équations de la droite

$$D_4,\quad \frac{x_1}{\alpha_{1,4}} = \frac{x_2}{\alpha_{2,4}} = \frac{x_3}{\alpha_{3,4}},$$

qui réunit le sommet $o = x_1 = x_2 = x_3$ du premier tétraèdre au sommet $o = X_1 = X_2 = X_3$ du second.

Remarquons, à cet effet, que si les trois premières des équations (X),

$$o = X_1,\quad o = X_2,\quad o = X_3,$$

étaient résolues par rapport aux inconnues $\frac{x_1}{x_4}, \frac{x_2}{x_4}, \frac{x_3}{x_4}$, on aurait

$$\frac{x_1}{x_4} = \frac{N_1}{D},\quad \frac{x_2}{x_4} = \frac{N_2}{D},\quad \frac{x_3}{x_4} = \frac{N_3}{D};$$

et, par suite,

$$\frac{x_1}{N_1} = \frac{x_2}{N_2} = \frac{x_3}{N_3}.$$

Les coefficients $\alpha_{1,4}$, $\alpha_{2,4}$, $\alpha_{3,4}$ des équations D_4 ne sont donc autres que N_1, N_2, N_3', et peuvent se déduire immédiatement, suivant la règle connue, du déterminant

$$D = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} = a_{1,1}(a_{2,2}a_{2,3} - a_{2,3}a_{3,2}) + a_{2,1}(a_{3,2}a_{1,3} - a_{3,3}a_{1,2}) + a_{3,1}(a_{1,2}a_{1,3} - a_{1,3}a_{2,2}).$$

On a donc, en se bornant au calcul du coefficient $\alpha_{1,4}$,

$$(1,4) \quad \begin{cases} \alpha_{1,4} = -a_{1,4}(a_{2,2}a_{3,3} - a_{2,3}a_{3,2}) - a_{2,4}(a_{3,2}a_{1,3} - a_{3,3}a_{1,2}) \\ \qquad - a_{3,4}(a_{1,2}a_{2,3} - a_{1,3}a_{2,2}). \end{cases}$$

D'un autre côté, les équations de la droite D_1, qui réunit les sommets $o = x_4 = x_2 = x_3$ du premier tétraèdre au sommet homologue $o = X_4 = X_2 = X_3$ du second, étant

$$D_1, \quad \frac{x_4}{\alpha_{4,1}} = \frac{x_2}{\alpha_{2,1}} = \frac{x_3}{\alpha_{3,1}},$$

il résulte, de la définition des droites D_4, D_1 et de la notation, que l'on pourra passer du coefficient $\alpha_{1,4}$, relatif à la première de ces droites, au coefficient $\alpha_{4,1}$, relatif à la seconde, par le simple échange des indices 1 et 4, et l'on a

$$(4,1) \quad \begin{cases} \alpha_{4,1} = -a_{4,1}(a_{2,2}a_{3,3} - a_{2,3}a_{3,2}) - a_{2,1}(a_{3,2}a_{4,3} - a_{3,3}a_{4,2}) \\ \qquad - a_{3,1}(a_{4,2}a_{3,2} - a_{4,3}a_{2,2}). \end{cases}$$

D'ailleurs, en vertu des relations données (δ), les coefficients $\alpha_{1,4}$ et $\alpha_{4,1}$ sont identiques; on a la suite d'égalités

$$1 = \frac{\alpha_{1,4}}{\alpha_{4,1}} = \frac{\alpha_{1,3}}{\alpha_{3,1}} = \ldots = \frac{\alpha_{i,k}}{\alpha_{k,i}};$$

et les droites D_1, D_2, D_3, D_4 sont quatre génératrices d'un même hyperboloïde.

X.

1. Équation générale des surfaces du second ordre inscrites au tétraèdre $o = x_1 = x_2 = x_3 = x_4$.

Si l'on désigne par $a_{1,2}$, $a_{1,3}$, $a_{1,4}$, $a_{2,3}$, $a_{3,4}$, $a_{2,4}$ six coefficients indéterminés,

$$(1)\quad \Sigma x_1^2 \,.\, a_{2,3}a_{3,4}a_{2,4} + \Sigma x_1 x_2 \,.\, a_{3,4}(a_{1,2}a_{3,4} - a_{1,3}a_{2,4} - a_{1,4}a_{2,3}) = 0$$

sera l'équation générale des surfaces du second ordre inscrites au tétraèdre $0 = x_1 = x_2 = x_3 = x_4$.

Bien qu'exigeant d'assez longs calculs, la vérification de cette équation ne présente pas de difficulté. On peut y parvenir d'ailleurs par une méthode régulière, indépendante des tâtonnements, dont l'emploi suffit souvent dans les questions de ce genre, mais qui seraient insuffisants dans celle-ci.

2. Si les équations $0 = x_1 = x_2 = \ldots$ des faces du tétraèdre sont de la forme

$$0 = x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p,$$

et que, en désignant par (x_1, x_2), (x_1, x_3), ..., les angles dièdres formés par les faces x_1 et x_2, x_1 et x_3, ... l'on pose dans l'équation (1),

$$(1')\qquad a_{1,2} = \cos^2\frac{1}{2}(x_1, x_2), \quad a_{1,3} = \cos^2\frac{1}{2}(x_1, x_3), \ldots,$$

l'équation (1) représentera la *sphère inscrite* au même tétraèdre.

3. Enfin la *sphère circonscrite* est représentée par l'équation

$$(2)\qquad \Sigma x_1 x_2 \,.\, a_{3,4}\sin(x_3, x_4) = 0,$$

où $a_{3,4}$ désigne la longueur de l'arête intersection des faces $0 = x_3$, $0 = x_4$.

Cette dernière équation a été donnée déjà par M. Prouhet, quoique sous une forme moins simple.