JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

Extrait d'une Lettre de M. Liouville à M. Besge

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 7 (1862), p. 375-376.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1862_2_7__375_0>

EXTRAIT D'UNE LETTRE DE M. LIOUVILLE A M. BESGE.

« .... Puisque vous vous intéressez aux formules concernant les » sommes de diviseurs des nombres (formules qu'il est au surplus » bien facile maintenant de multiplier), je vous communiquerai un » théorème qu'on déduit de l'équation marquée (φ) dans mon dou- » zième article *sur quelques formules générales* [*], en y faisant, » comme on en a le droit, $F(x, y, z) = xyz$.

» Soit m un nombre entier donné quelconque. Représentons à » notre ordinaire par $\zeta_1(n)$ la somme des diviseurs de chaque entier » n; et considérons la somme

$$m\zeta_1(m) + 2\sum(m - 5m'^2)\zeta_1(m - m'^2)$$

» que nous désignerons par S et où le signe $\sum$ porte sur m' dont les » valeurs successives sont 1, 2, 3, 4,..., en s'arrêtant au moment où » la quantité placée sous le signe ζ_1 deviendrait nulle ou négative, de » sorte que m' vérifie toujours l'inégalité

$$m - m'^2 > 0.$$

» Cela posé, notre théorème consiste en ce que l'on a

$$S = 0$$

» quand m n'est pas un carré, mais

$$S = \frac{m(4m-1)}{3}$$

» quand m est un carré.

[*] Cahier de janvier 1860.

» Ainsi, pour $m = 17$, la somme S, qui est alors exprimée par

$$17\zeta_1(17) + 2(17 - 5.1^2)\zeta_1(16) + 2(17 - 5.2^2)\zeta_1(13) \\ + 2(17 - 5.3^2)\zeta_1(8) + 2(17 - 5.4^2)\zeta_1(1),$$

» se réduit à zéro, comme on le verra sans peine en observant que

$$\zeta_1(17) = 18,\quad \zeta_1(16) = 31,\quad \zeta_1(13) = 14,\quad \zeta_1(8) = 15,\quad \zeta_1(1) = 1.$$

» Au contraire, pour $m = 9$, elle deviendra

$$9\zeta_1(9) + 2(9 - 5.1^2)\zeta_1(8) + 2(9 - 5.2^2)\zeta_1(5),$$

» et on la trouvera égale à 105, c'est-à-dire à

$$\frac{9(4.9 - 1)}{3},$$

» conformément à notre théorème, attendu que 9 est un carré. De
» même, pour $m = 16$, on obtiendrait

$$S = \frac{16(4.16 - 1)}{3} = 336.$$

» Mais je ne veux pas insister sur ces vérifications numériques. »