JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

C.-J. MALMSTEN

Mémoire sur l'intégration des équations différentielles

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 7 (1862), p. 257-374.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1862_2_7__257_0>

MÉMOIRE

SUR

L'INTÉGRATION DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES;

PAR C.-J. MALMSTEN.

TRADUIT LIBREMENT DU SUÉDOIS, PAR L'AUTEUR.

INTRODUCTION.

Le théorème que Jacobi a proposé dans sa *Theoria novi multiplicatoris æquationum differentialium,* chap Ier, § II, est certainement un des plus remarquables que l'analyse moderne ait présentés. En effet, il constitue pour l'intégration des équations différentielles un principe tout à fait nouveau, que l'illustre auteur appelle *le principe du dernier multiplicateur,* et qui dans ses applications nous donne accès aux résultats auparavant inconnus de cette partie difficile de la science.

Ce théorème, on le sait, nous enseigne que, si

$$X,\ X_1,\ X_2,\ldots,\ X_n$$

sont fonctions de

$$x,\ x_1,\ x_2,\ldots,\ x_n$$

et qu'aux équations différentielles

$$dx : dx_1 : dx_2 : \ldots : dx_n = X : X_1 : X_2 : \ldots : X_n,$$

on ait trouvé $n-1$ intégrales, l'intégrale $n^{ième}$ restante se trouvera toujours par de simples quadratures, pourvu que l'on puisse trouver un $\mathfrak{M}$ quelconque (toutefois non constant) qui satisfasse à l'équation [*]

$$\text{(A)} \qquad \frac{\mathrm{d} \log \mathfrak{M}}{\mathrm{d}x} + \frac{d\mathrm{X}}{\mathrm{d}x} + \frac{d\mathrm{X}_1}{\mathrm{d}x_1} + \frac{d\mathrm{X}_2}{\mathrm{d}x_2} + \ldots + \frac{d\mathrm{X}_n}{\mathrm{d}x_n} = 0.$$

Ainsi toute la difficulté se réduit à trouver une solution quelconque de l'équation (A); mais cette difficulté est assez grande pour, dans la plupart des cas, rendre chaque effort à cet égard infructueux.

On sait depuis longtemps que le plus puissant expédient que l'on ait pour surmonter en général les difficultés analytiques, consiste en des transformations convenables, c'est-à-dire, bien propres au but que l'on se propose. Il n'y a point de partie de l'analyse où elles ne remplissent le rôle le plus important; oui, on peut dire avec raison que la méthode analytique consiste principalement dans la transformation. Aussi la pensée se présente presque spontanément de transformer les formules de Jacobi en y introduisant de nouvelles variables qui, quand bien même elles ne nous laisseraient pas surmonter *généralement* les difficultés, présentent cependant de *nouveaux* cas où cela est possible. Car une telle transformation sera en effet aussi une généralisation, qui nous conduit pour ainsi dire *hors* des anciennes limites et nous apprend à connaître, outre les anciens cas d'intégration, aussi de nouveaux.

Le théorème I de ce Mémoire contient une pareille généralisation de la proposition de Jacobi. Tandis que cette proposition, comme il a déjà été dit, concerne le système des équations différentielles

$$(1) \qquad \mathrm{d}x : \mathrm{d}x_1 : \mathrm{d}x_2 : \ldots : \mathrm{d}x_n = \mathrm{X} : \mathrm{X}_1 : \mathrm{X}_2 : \ldots : \mathrm{X}_n,$$

notre théorème s'occupe de cet autre système de telles équations

$$(2) \qquad \mathrm{d}x : \mathrm{d}\varphi_1 : \mathrm{d}\varphi_2 : \ldots : \mathrm{d}\varphi_n = 1 : \psi_1 : \psi_2 : \ldots : \psi_n,$$

où $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ et $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n$ sont fonctions de $x, x_1, x_2, \ldots, x_n$.

---

[*] Nous suivons dans ce Mémoire le mode de notation de Jacobi et nous désignons par d la différentielle totale et par d une différentielle partielle par rapport à la variable que montre le dénominateur.

On voit facilement combien le système (2) est plus général que le système (1). Dans le cas spécial

$$\varphi_1 = x_1, \quad \varphi_2 = x_2, \ldots, \quad \varphi_n = x_n,$$

les deux systèmes coïncident entièrement.

Ce Mémoire peut être regardé comme étant divisé en trois parties. Dans la *première*, qui comprend les §§ I à IX, nous proposons le théorème I ci-dessus mentionné. Nous le déduirons d'abord comme un résultat de transformation de la célèbre proposition de Jacobi, et nous en donnerons ensuite une autre démonstration plus directe et entièrement indépendante de la *théorie du dernier multiplicateur*. Nous donnerons dans le théorème II une autre forme à la même proposition générale, de laquelle nous déduirons aussi les deux théorèmes III et IV dont on pourra apercevoir sans difficulté l'importance pour l'intégration des équations différentielles d'un ordre quelconque. Nous demandons surtout à appeler l'attention sur les corollaires déduits de ces théorèmes, et qui nous enseignent que, si en général φ et ψ sont des fonctions de x, y, y', y'',..., $y^{(n-1)}$, et qu'on ait trouvé $n-1$ intégrales premières soit à l'équation

$$d\varphi = \psi . dx,$$

soit à celle-ci

$$d\varphi = y^{(n-1)} . \psi dx,$$

l'intégrale $n^{ième}$ restante se réduira toujours aux quadratures, *pour la première* aussi souvent que $y^{(n-2)}$ ne se trouve pas dans φ et $y^{(n-1)}$ non plus dans ψ, et *pour la dernière* aussi souvent que φ n'est qu'une fonction de $y^{(n-2)}$ et de $y^{(n-1)}$, et qu'en même temps $y^{(n-1)}$ ne se trouve pas dans ψ. Les formules de Jacobi nous apprennent seulement par rapport à

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \psi$$

que, quand ψ ne contient pas $y^{(n-1)}$, son intégrale $n^{ième}$ se réduira aux quadratures.

Dans la *seconde partie* de ce Mémoire, qui comprend les §§ X à

XVI, nous nous occuperons plus spécialement des équations différentielles du second ordre. Parmi ces équations

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \psi(x, y)$$

a jusqu'ici été reconnue comme la seule forme générale dont l'intégration ne dépend que des quadratures aussitôt qu'on lui a trouvé une première intégrale. Les corollaires déduits de nos théorèmes V et VI montrent que la même propriété remarquable appartient aussi aux équations beaucoup plus générales

$$\frac{d\varphi(x, y')}{dx} = \psi(x, y),$$

$$\frac{d\varphi(y, y')}{dx} = y' . \varphi(x, y).$$

Mais elle n'appartient pas seulement aux équations de cette forme qui sont toutes deux du second ordre. Dans un Mémoire de M. Liouville, « Remarques sur une classe d'équations différentielles, » inséré dans le *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, t. XIV, p. 225, ce célèbre mathématicien a réussi par des transformations très-ingénieuses à montrer aussi dans cette équation du troisième ordre

$$d . \frac{\varphi(z) . \frac{d^2 z}{dx^2}}{dx} = f(z) . F\left[\varphi(z) . \frac{d^2 z}{dx^2}\right]$$

la même propriété inconnue auparavant (*voir* p. 231). Cependant cette équation et celle encore plus générale que l'auteur mentionne à la fin de son Mémoire, ne sont que des cas spéciaux d'un groupe très-étendu d'équations différentielles du troisième ordre, qui jouissent de la même propriété. En effet, les corollaires que nous déduirons des théorèmes VII et VIII nous enseignent que l'on n'a besoin que de connaître *une* première intégrale aux équations

$$\frac{d\varphi(y, y'')}{dx} = \psi(y, y'),$$

$$\frac{d\varphi(y', y'')}{dx} = y'' . \psi(y, y'),$$

pour qu'en général leur intégration complète soit réduite aux quadratures.

A l'aide des théorèmes proposés dans cette seconde partie de ce Mémoire, nous avons pu complétement intégrer les équations

$$\frac{yy''}{ry'^2} = \frac{c + (y')^{\frac{1}{r}-1} \cdot \mathfrak{F}(z)}{c + my^{1-r}},$$

$$\frac{2yy''}{ry'^2} = 1 + \frac{ax + b + cy^{1-r}}{\sqrt{(ax+b)^2 + 2c(ax+m)y^{1-r} + c^2y^{2(1-r)}}},$$

$$\frac{y''}{(a + 2by' + y'^2)^{\frac{3}{2}}} = 2.f(u),$$

où

$$z = \frac{ax + ny^{1-r}}{c + my^{1-r}}, \quad u = ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2ex + 2fy + g,$$

et résoudre aussi complétement deux problèmes géométriques trèscurieux, savoir :

Trouver la courbe dont le rayon de courbure est une fonction quelconque du rayon vecteur.

Trouver une telle courbe, que pour chacun de ses points le produit de l'ordonnée et de la sous-tangente, multiplié par le rayon de courbure de la développée, soit une fonction quelconque de la normale.

Quant au premier de ces problèmes, j'en avais déjà depuis longtemps trouvé une solution que je communiquai à M. A. Svanberg, qui en présenta plus tard une autre solution dans les *Nova Acta Regiæ Societatis Upsaliensis*. Quant au second problème, il est proposé ici pour la première fois, et conduit à une équation différentielle du troisième ordre, sur l'intégration complète de laquelle on n'a pas à la première vue de très grandes espérances.

Nous traitons dans la *troisième et dernière partie* de ce Mémoire les équations différentielles du premier ordre. A l'aide des théorèmes IX et X, qui résultent immédiatement des théorèmes V et VI et dont on peut sans la moindre difficulté vérifier la justesse, nous avons intégré un nombre assez considérable de différents groupes d'équations différentielles dont on n'avait pas auparavant, autant que nous sachions, proposé les intégrales.

Une méthode bien connue depuis longtemps d'intégrer les équations différentielles du premier ordre consiste dans la différentiation. On différentie l'équation donnée et l'on obtient ainsi une équation du second ordre. Si l'on réussit alors à trouver à cette dernière une autre intégrale première que celle sur laquelle la différentiation a été effectuée, on obtient l'intégrale cherchée en éliminant y' entre les deux intégrales premières ainsi connues.

C'est ainsi que Clairaut, dans les *Mémoires de l'Académie des Sciences de Paris*, 1734, intégra l'équation différentielle connue depuis sous son nom

$$y - xy' = f(y');$$

et cette méthode peut même être appliquée avantageusement à d'autres équations analogues, comme

$$\begin{aligned} y &= x.f(y') + f_1(y'), \\ x &= y.f(y') + f_1(y'), \\ y - 2xy' &= y'.f(yy'), \\ y.\sqrt{1+y'^2} &= f(x+yy'), \end{aligned}$$

où y' entre sous une forme implicite. Mais elle est cependant limitée aux cas où le résultat de la différentiation est d'une forme si simple, que *la séparation des variables* y saute en quelque sorte aux yeux.

L'extension que nous avons donnée à cette méthode dans les théorèmes IX et X consiste principalement en ce que nous différentions l'équation donnée, *non* pour soumettre le résultat obtenu à une nouvelle intégration *immédiate*, mais pour trouver par là un facteur convenable de l'intégration. Quant à la quadrature qui se présente, elle est souvent accompagnée de si grandes difficultés, que l'on a bien besoin d'avoir la certitude qu'elle doit réussir pour ne pas en abandonner l'exécution.

En nous rappelant quel petit nombre d'équations différentielles, où

y' se présente sous une forme plus implicite, l'on a réussi à intégrer, et en considérant aussi que beaucoup de problèmes géométriques conduisent justement à des équations d'une telle forme, il nous semble que les applications que nous avons faites des théorèmes IX et X ne seront pas sans intérêt et sans importance. En effet, nous avons réussi, au moyen de ces théorèmes, à intégrer une vingtaine de classes particulières d'équations différentielles dont nous n'avons pas vu les intégrales proposées ailleurs. Quant à ce qui concerne les six premiers exemples, ils renferment des solutions d'autant de problèmes géométriques et ils ne sont pas par conséquent aussi généraux que les quatorze suivants. Parmi ces derniers, nous nous permettons de fixer l'attention principalement sur les exemples 13, 18, 19 et 20, dont les formes

$$\frac{xy' + my}{(y')^r} = f\left[\frac{xy' + ny}{(y')^s}\right],$$

$$\frac{ax + by + yy'}{\sqrt{a + by' + y'^2}} = f\left(\frac{xy' - y}{\sqrt{a + by' + y'^2}}\right),$$

$$\frac{ax + by + yy'}{\sqrt{a + by' + y'^2}} = f(y^2 + bxy + ax^2)$$

$$\frac{xy' - y}{(y' + \alpha)^{1-r}.(y' + \beta)^r} = f[(y + \alpha x)^r.(y + \beta x)^{1-r}],$$

sont si singulières, qu'elles me semblent bien mériter une telle attention.

---

§ I.

Notations. — Soient

$$\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$$

des fonctions de

$$x_1, x_2, \ldots, x_n;$$

nous nous servons, pour abréger, des signes suivants :

$$(3) \qquad \Delta(\varphi) = \begin{vmatrix} \frac{d\varphi_1}{dx_1}, & \frac{d\varphi_1}{dx_2}, \ldots, & \frac{d\varphi_1}{dx_n} \\ \frac{d\varphi_2}{dx_1}, & \frac{d\varphi_2}{dx_2}, \ldots, & \frac{d\varphi_2}{dx_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{d\varphi_n}{dx_1}, & \frac{d\varphi_n}{dx_2}, \ldots, & \frac{d\varphi_n}{dx_n} \end{vmatrix}$$

$$\mathcal{D}_{n-1}\left(\frac{d\varphi_r}{dx_i}\right) = \begin{vmatrix} \frac{d\varphi_1}{dx_1}, \ldots, & \frac{d\varphi_1}{dx_{i-1}}, & \frac{d\varphi_1}{dx_{i+1}}, \ldots, & \frac{d\varphi_1}{dx_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{d\varphi_{r-1}}{dx_1}, \ldots, & \frac{d\varphi_{r-1}}{dx_{i-1}}, & \frac{d\varphi_{r-1}}{dx_{i+1}}, \ldots, & \frac{d\varphi_{r-1}}{dx_n} \\ \frac{d\varphi_{r+1}}{dx_1}, \ldots, & \frac{d\varphi_{r+1}}{dx_{i-1}}, & \frac{d\varphi_{r+1}}{dx_{i+1}}, \ldots, & \frac{d\varphi_{r+1}}{dx_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{d\varphi_n}{dx_1}, \ldots, & \frac{d\varphi_n}{dx_{i-1}}, & \frac{d\varphi_n}{dx_{i+1}}, \ldots, & \frac{d\varphi_n}{dx_n} \end{vmatrix}$$

$$(4) \qquad F_\varphi^{(x_i)}(v) = \begin{vmatrix} \frac{d\varphi_1}{dx_1}, \ldots, & \frac{d\varphi_1}{dx_{i-1}}, & v_1, & \frac{d\varphi_1}{dx_{i+1}}, \ldots, & \frac{d\varphi_1}{dx_n} \\ \frac{d\varphi_2}{dx_1}, \ldots, & \frac{d\varphi_2}{dx_{i-1}}, & v_2, & \frac{d\varphi_2}{dx_{i+1}}, \ldots, & \frac{d\varphi_2}{dx_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{d\varphi_n}{dx_1}, \ldots, & \frac{d\varphi_n}{dx_{i-1}}, & v_n, & \frac{d\varphi_n}{dx_{i+1}}, \ldots, & \frac{d\varphi_n}{dx_n} \end{vmatrix}$$

§ II.

Lemme I. — Soient

$$w_1,\ w_2, \ldots,\ w_n$$

des fonctions de

$$\varphi_1,\ \varphi_2, \ldots,\ \varphi_n,$$

qui sont elles-mêmes fonctions de

$$x,\ x_1,\ x_2, \ldots,\ x_n;$$

on a, pour $w_r = \varphi_k$,

$$\mathfrak{D}_{n-1}\left(\frac{dw_r}{\mathrm{d}x_i}\right) = \mathfrak{D}_{n-1}\left(\frac{dw_r}{d\varphi_k}\right)\cdot \mathfrak{D}_{n-1}\left(\frac{d\varphi_k}{\mathrm{d}x_i}\right).$$

La démonstration résulte immédiatement de la propriété des déterminants fonctionnaux qu'a démontrée Jacobi dans son Mémoire : *De determinantibus functionalibus*, prop. II. (Voir *Journal de Crelle*, t. XXII, p. 340.)

§ III.

Lemme II. — Faisons, pour abréger,

$$R = \begin{vmatrix} \frac{du}{\mathrm{d}x}, & \frac{du}{\mathrm{d}x_1}, \ldots, & \frac{du}{\mathrm{d}x_r} \\ \frac{du_1}{\mathrm{d}x}, & \frac{du_1}{\mathrm{d}x_1}, \ldots, & \frac{du_1}{\mathrm{d}x_r} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{du_r}{\mathrm{d}x}, & \frac{du_r}{\mathrm{d}x_1}, \ldots, & \frac{du_r}{\mathrm{d}x_r} \end{vmatrix}$$

et

$$\mathfrak{P}_k(s) = \begin{vmatrix} \frac{du}{\mathrm{d}x}, & \frac{du}{\mathrm{d}x_1}, \ldots, & \frac{du}{\mathrm{d}x_{k-1}}, & \frac{du}{\mathrm{d}x_{k+1}}, \ldots, & \frac{du}{\mathrm{d}x_r} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{du_{s-1}}{\mathrm{d}x}, & \frac{du_{s-1}}{\mathrm{d}x_1}, \ldots, & \frac{du_{s-1}}{\mathrm{d}x_{k-1}}, & \frac{du_{s-1}}{\mathrm{d}x_{k+1}}, \ldots, & \frac{du_{s-1}}{\mathrm{d}x_r} \\ \frac{du_{s+1}}{\mathrm{d}x}, & \frac{du_{s+1}}{\mathrm{d}x_1}, \ldots, & \frac{du_{s+1}}{\mathrm{d}x_{k-1}}, & \frac{du_{s+1}}{\mathrm{d}x_{k+1}}, \ldots, & \frac{du_{s+1}}{\mathrm{d}x_r} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{du_r}{\mathrm{d}x}, & \frac{du_r}{\mathrm{d}x_1}, \ldots, & \frac{du_r}{\mathrm{d}x_{k-1}}, & \frac{du_r}{\mathrm{d}x_{k+1}}, \ldots, & \frac{du_r}{\mathrm{d}x_r} \end{vmatrix},$$

nous aurons toujours

$$\sum_{0}^{r}{}_k (-1)^k \cdot \frac{d\mathfrak{P}_k(s)}{\mathrm{d}x_k} = \frac{d\mathfrak{P}_0(s)}{\mathrm{d}x} - \frac{d\mathfrak{P}_1(s)}{\mathrm{d}x_1} + \frac{d\mathfrak{P}_2(s)}{\mathrm{d}x_2} - \ldots \pm \frac{d\mathfrak{P}_r(s)}{\mathrm{d}x_r} = 0.$$

Démonstration. — Entre $\mathfrak{R}$ et $\mathfrak{P}_k(s)$ cette relation

$$(-1)^{k+s}.\,\mathfrak{P}_k(s) = \frac{d\mathfrak{R}}{\mathrm{d}\left(\dfrac{du_s}{\mathrm{d}x_k}\right)}$$

ayant lieu, il s'ensuit immédiatement que

$$(-1)^{k+s}.\,\frac{d\mathfrak{P}_k(s)}{\mathrm{d}\left(\dfrac{du_m}{\mathrm{d}x_i}\right)} = \frac{d^2\mathfrak{R}}{\mathrm{d}\left(\dfrac{du_s}{\mathrm{d}x_k}\right)\mathrm{d}\left(\dfrac{du_m}{\mathrm{d}x_i}\right)}.$$

Or, avec un peu d'attention, on reconnaît facilement que

$$\frac{d\mathfrak{P}_k(s)}{\mathrm{d}x_k} = \sum_{0}^{r}{}_m \sum_{0}^{r}{}_i \frac{d\mathfrak{P}(s)_k}{\mathrm{d}\left(\dfrac{du_m}{\mathrm{d}x_i}\right)} \cdot \frac{d^2u_m}{\mathrm{d}x_i\,\mathrm{d}x_k},$$

d'où nous aurons encore

$$(-1)^{k+s}\cdot\frac{d\mathfrak{P}_k(s)}{\mathrm{d}x_k} = \sum_{0}^{r}{}_m \sum_{0}^{r}{}_i \frac{d^2\mathfrak{R}}{\mathrm{d}\left(\dfrac{du_s}{\mathrm{d}x_k}\right)\mathrm{d}\left(\dfrac{du_m}{\mathrm{d}x_i}\right)} \cdot \frac{d^2u_m}{\mathrm{d}x_i\,\mathrm{d}x_k},$$

et, en prenant la somme depuis $k = 0$ jusqu'à $k = r$,

$$(-1)^s\cdot\sum_{0}^{r}{}_k(-1)^k\cdot\frac{d\mathfrak{P}_k(s)}{\mathrm{d}x_k} = \sum_{0}^{r}{}_m \sum_{0}^{r}{}_i \sum_{0}^{r}{}_k \cdot \frac{d^2\mathfrak{R}}{\mathrm{d}\left(\dfrac{du_s}{\mathrm{d}x_k}\right)\cdot\mathrm{d}\left(\dfrac{du_m}{\mathrm{d}x_i}\right)} \cdot \frac{d^2u_m}{\mathrm{d}x_i\,\mathrm{d}x_k}.$$

Pareillement, on trouvera

$$(-1)^s\cdot\sum_{0}^{r}{}_i(-1)^i\cdot\frac{d\mathfrak{P}_i(s)}{\mathrm{d}x_i} = \sum_{0}^{r}{}_m \sum_{0}^{r}{}_i \sum_{0}^{r}{}_k \cdot \frac{d^2\mathfrak{R}}{\mathrm{d}\left(\dfrac{du_s}{\mathrm{d}x_i}\right)\cdot\mathrm{d}\left(\dfrac{du_m}{\mathrm{d}x_k}\right)} \cdot \frac{d^2u}{\mathrm{d}x_i\,\mathrm{d}x_k},$$

d'où l'on conclura par l'addition

$$(5)\quad\left\{\begin{aligned}&(-1)^s\cdot 2\cdot\sum_{0}^{r}{}_k(-1)^k\cdot\frac{d\mathfrak{P}_k(s)}{\mathrm{d}x_k}\\ &= \sum_{0}^{r}{}_m \sum_{0}^{r}{}_i \sum_{0}^{r}{}_k \cdot \left[\frac{d^2\mathfrak{R}}{\mathrm{d}\left(\dfrac{du_s}{\mathrm{d}x_i}\right)\cdot\mathrm{d}\left(\dfrac{du_m}{\mathrm{d}x_k}\right)} + \frac{d^2\mathfrak{R}}{\mathrm{d}\left(\dfrac{du_s}{\mathrm{d}x_k}\right)\cdot\mathrm{d}\left(\dfrac{du_m}{\mathrm{d}x_i}\right)}\right] \cdot \frac{d^2u_m}{\mathrm{d}x_i\,\mathrm{d}x_k}.\end{aligned}\right.$$

Désignons à présent par $\mathfrak{R}_1$ ce que devient $\mathfrak{R}$ en y permutant i et k, et posons, pour abréger,

$$(6) \qquad \mathcal{A} = \frac{d^2 \mathfrak{R}}{\mathrm{d}\left(\frac{du_s}{\mathrm{d}x_i}\right) \cdot \mathrm{d}\left(\frac{du_m}{\mathrm{d}x_k}\right)};$$

à cause que les indices i et k ne s'y trouvent ni l'un ni l'autre, $\mathcal{A}$ ne devient pas changé par cette permutation; d'où l'on aura

$$\mathcal{A} = \frac{d^2 \mathfrak{R}_1}{\mathrm{d}\left(\frac{du_s}{\mathrm{d}x_k}\right) \cdot \mathrm{d}\left(\frac{du_m}{\mathrm{d}x_i}\right)},$$

ou, à cause de $\mathfrak{R}_1 = -\mathfrak{R}$,

$$(7) \qquad \mathcal{A} = -\frac{d^2 \mathfrak{R}}{\mathrm{d}\left(\frac{du_s}{\mathrm{d}x_k}\right) \cdot \mathrm{d}\left(\frac{du_m}{\mathrm{d}x_i}\right)}.$$

En retranchant les formules (6) et (7) l'une de l'autre, on obtiendra

$$\frac{d^2 \mathfrak{R}}{\mathrm{d}\left(\frac{du_s}{\mathrm{d}x_i}\right) \cdot \mathrm{d}\left(\frac{du_m}{\mathrm{d}x_k}\right)} + \frac{d^2 \mathfrak{R}}{\mathrm{d}\left(\frac{du_s}{\mathrm{d}x_k}\right) \cdot \mathrm{d}\left(\frac{du_m}{\mathrm{d}x_i}\right)} = 0,$$

ce qui donne, en vertu de l'équation (5),

$$\sum_{0}^{r}{}_{k} (-1)^k \cdot \frac{d\mathfrak{P}_k(s)}{\mathrm{d}x_k} = 0.$$

§ IV.

Lemme III. — Soient

$$\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n$$

des fonctions de

$$x_1, x_2, \ldots, x_n,$$

et supposons que

$$\mathrm{F}_{\varphi}^{(x_k)}(\psi)$$

ait la signification indiquée par la formule (4), nous aurons toujours

$$\sum_{1}^{n}{}_{k}\frac{d\mathrm{F}_{\varphi}^{(x_k)}(\psi)}{\mathrm{d}x_k} = \sum_{1}^{n}{}_{k}.\mathrm{F}_{\varphi}^{(x_k)}\left(\frac{d\psi}{\mathrm{d}x_k}\right).$$

Démonstration. — Supposons, pour abréger,

$$\mathfrak{P}_k(r) = \begin{vmatrix} \frac{d\varphi_1}{\mathrm{d}x_1}, \ldots, & \frac{d\varphi_1}{\mathrm{d}x_{k-1}}, & \frac{d\varphi_1}{\mathrm{d}x_{k+1}}, \ldots, & \frac{d\varphi_1}{\mathrm{d}x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{d\varphi_{r-1}}{\mathrm{d}x_1}, \ldots, & \frac{d\varphi_{r-1}}{\mathrm{d}x_{k-1}}, & \frac{d\varphi_{r-1}}{\mathrm{d}x_{k+1}}, \ldots, & \frac{d\varphi_{r-1}}{\mathrm{d}x_n} \\ \frac{d\varphi_{r+1}}{\mathrm{d}x_1}, \ldots, & \frac{d\varphi_{r+1}}{\mathrm{d}x_{k-1}}, & \frac{d\varphi_{r+1}}{\mathrm{d}x_{k+1}}, \ldots, & \frac{d\varphi_{r+1}}{\mathrm{d}x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{d\varphi_n}{\mathrm{d}x_1}, \ldots, & \frac{d\varphi_n}{\mathrm{d}x_{k-1}}, & \frac{d\varphi_n}{\mathrm{d}x_{k+1}}, \ldots, & \frac{d\varphi_n}{\mathrm{d}x_n} \end{vmatrix},$$

il est clair que

$$\mathrm{F}_{\varphi}^{(x_k)}(\psi) = \sum_{1}^{n}{}_{r}(-1)^{k+r}.\mathfrak{P}_k(r).\psi_r,$$

et partant

$$\frac{d\mathrm{F}_{\varphi}^{(x_k)}(\psi)}{\mathrm{d}x_k} = \mathrm{F}_{\varphi}^{(x_k)}\left(\frac{d\psi}{\mathrm{d}x_k}\right) + \sum_{1}^{n}{}_{r}(-1)^{k+r}.\psi_r.\frac{d\mathfrak{P}_k(r)}{\mathrm{d}x_k}.$$

En prenant la somme depuis $k=1$ jusqu'à $k=n$, nous aurons

$$\sum_{1}^{n}{}_{k}.\frac{d\mathrm{F}_{\varphi}^{(x_k)}(\psi)}{\mathrm{d}x_k} = \sum_{1}^{n}{}_{k}\mathrm{F}_{\varphi}^{(x_k)}\left(\frac{d\psi}{\mathrm{d}x_k}\right) + \sum_{1}^{n}{}_{r}(-1)^{r-1}.\psi_r.\sum_{1}^{n}{}_{k}(-1)^{k-1}.\frac{d\mathfrak{P}_k(r)}{\mathrm{d}x_k},$$

d'où, à cause qu'en vertu du lemme précédent

$$\sum_{1}^{n}{}_{k}(-1)^{k-1}.\frac{d\mathfrak{P}_k(r)}{\mathrm{d}x_k} = 0,$$

il suit

$$\sum_{1}^{n}{}_k \frac{d.\,\mathrm{F}_\varphi^{(x_k)}(\psi)}{\mathrm{d}x_k} = \sum_{1}^{n}{}_k .\,\mathrm{F}_\varphi^{(x_k)}\left(\frac{d\psi}{\mathrm{d}x_k}\right).$$

§ V.

Théorème I. — *Soient*

$$\varphi_1,\ \varphi_2,\ldots,\ \varphi_n$$

et

$$\psi_1,\ \psi_2,\ldots,\ \psi_n$$

des fonctions de

$$x,\ x_1,\ x_2,\ldots,\ x_n.$$

Considérons les équations différentielles simultanées

$$(8)\qquad \begin{cases} d\varphi_1 = \psi_1\,\mathrm{d}x \\ d\varphi_2 = \psi_2\,\mathrm{d}x \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ d\varphi_n = \psi_n\,\mathrm{d}x, \end{cases}$$

et supposons qu'on en ait trouvé $n-1$ intégrales

$$(9)\qquad w_1 = \alpha_1,\ w_2 = \alpha_2,\ldots,\ w_{n-1} = \alpha_{n-1};$$

alors, si à l'aide de ces $n-1$ équations on exprime les valeurs de

$$x_1,\ldots,\ x_{i-1},\ x_{i+1},\ldots,\ x_n$$

en x et x_i,

$$\frac{\mathfrak{M}\left[\Delta(\varphi).\mathrm{d}x_i - \mathrm{F}_\varphi^{(x_i)}\left(\psi - \frac{d\varphi}{\mathrm{d}x}\right)\cdot \mathrm{d}x\right]}{\mathfrak{D}_{n-1}\left(\frac{dw_n}{\mathrm{d}x_i}\right)}$$

sera une différentielle exacte et l'on aura

$$\int \frac{\mathfrak{M}\left[\Delta(\varphi)\ \mathrm{d}x_i - \mathrm{F}_\varphi^{(x_i)}\left(\psi - \frac{d\varphi}{\mathrm{d}x}\right).\mathrm{d}x\right]}{\mathfrak{D}_{n-1}\left(\frac{dw_n}{\mathrm{d}x_i}\right)} = \text{const.}$$

pour l'intégrale $n^{\text{ième}}$ restante des équations (8), *pourvu que* $\mathfrak{M}$ *soit tel qu'il satisfasse à*

$$\Delta(\varphi).\frac{\mathrm{d}\log\mathfrak{M}}{\mathrm{d}x}+\sum_{1}^{n}{}_{r}\,\mathrm{F}_{\varphi}^{(x_r)}\left(\frac{d\psi}{\mathrm{d}x_r}\right)=0.$$

Démonstration. — Dans sa *Theoria novi multiplicatoris* (voir *Journal de Crelle,* tome XXVII, page 251), Jacobi a démontré qu'ayant trouvé aux équations différentielles

$$(10)\quad\begin{cases}\mathrm{d}\varphi_1=p_1\,\mathrm{d}x,\\ \mathrm{d}\varphi_2=p_2\,\mathrm{d}x,\\ \dots\dots\dots\dots\\ \mathrm{d}\varphi_n=p_n\,\mathrm{d}x,\end{cases}$$

(où $p_1, p_2,\ldots, p_n$ sont des fonctions de $x, \varphi_1, \varphi_2,\ldots, \varphi_n$) $n-1$ intégrales

$$(11)\quad\begin{cases}u_1=u_1\quad(x,\ \varphi_1,\ \varphi_2,\ldots,\ \varphi_n)=\alpha_1,\\ u_2=u_2\quad(x,\ \varphi_1,\ \varphi_2,\ldots,\ \varphi_n)=\alpha_2,\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ u_{n-1}=u_{n-1}(x,\ \varphi_1,\ \varphi_2,\ldots,\ \varphi_n)=\alpha_{n-1},\end{cases}$$

et prenant arbitrairement deux autres fonctions

$$(12)\quad\begin{cases}u_n\quad=u_n\quad(x,\ \varphi_1,\ \varphi_2,\ldots,\ \varphi_n)\\ u_{n+1}=u_{n+1}(x,\ \varphi_1,\ \varphi_2,\ldots,\ \varphi_n)\end{cases}$$

on aura pour l'intégrale $n^{\text{ième}}$ restante des équations (10)

$$(13)\qquad\int\frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{P}}(\mathfrak{v}_{n+1}\,\mathrm{d}u_n-\mathfrak{v}_n\,\mathrm{d}u_{n+1})=\text{const.},$$

si l'on pose, pour abréger,

$$(14)\qquad\mathfrak{v}_n=\frac{du_n}{\mathrm{d}x}+p_1\frac{du_n}{\mathrm{d}\varphi_1}+p_2.\frac{du_n}{\mathrm{d}\varphi_2}+\ldots+p_n.\frac{du_n}{\mathrm{d}\varphi_n},$$

$$\mathfrak{v}_{n+1}=\frac{du_{n+1}}{\mathrm{d}x}+p_1.\frac{du_{n+1}}{\mathrm{d}\varphi_1}+p_2.\frac{du_{n+1}}{\mathrm{d}\varphi_2}+\ldots+p_n.\frac{du_{n+1}}{\mathrm{d}\varphi_n},$$

$$(15)\qquad \mathfrak{P} = \begin{vmatrix} \frac{du_1}{dx}, & \frac{du_1}{d\varphi_1}, & \frac{du_1}{d\varphi_2}, \ldots, & \frac{du_1}{d\varphi_n} \\ \frac{du_2}{dx}, & \frac{du_2}{d\varphi_1}, & \frac{du_2}{d\varphi_2}, \ldots, & \frac{du_2}{d\varphi_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{du_{n+1}}{dx}, & \frac{du_{n+1}}{d\varphi_1}, & \frac{du_{n+1}}{d\varphi_2}, \ldots, & \frac{du_{n+1}}{d\varphi_n} \end{vmatrix}$$

et que $\mathfrak{M}$ soit tel qu'il satisfasse à

$$(16)\qquad \frac{d\log\mathfrak{M}}{dx} + \sum_1^n{}_k . \frac{dp_k}{d\varphi_k} = 0.$$

L'intégration dans l'équation (13) s'effectuera toujours par de simples quadratures, parce que

$$\frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{P}}(\mathfrak{V}_{n+1}.du_n - \mathfrak{V}_n.du_{n+1})$$

deviendra une différentielle exacte, si à l'aide des équations (11) et (12) les variables $x, \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ dans $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{V}_n$ et $\mathfrak{V}_{n+1}$ sont exprimées en $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}, u_n$ et u_{n+1}.

Introduisons dans cette proposition de M. Jacobi, au lieu des anciennes variables

$$\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n,$$

de nouvelles

$$x_1, x_2, \ldots, x_n,$$

qui sont liées avec celles-là par les relations

$$(17)\qquad \begin{cases} \varphi_1 = \varphi_1(x, x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ \varphi_2 = \varphi_2(x, x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \varphi_n = \varphi_n(x, x_1, x_2, \ldots, x_n), \end{cases}$$

et désignons par ψ et w ce que deviennent p et u par cette substitution, de sorte que $p_1, p_2 \ldots, p_n$, deviennent

$$\begin{array}{lcc}
\psi_1(x,\ x_1,\ x_2,\ldots,\ x_n) & \text{ou, par abréviation,} & \psi_1, \\
\psi_2(x,\ x_1,\ x_2,\ldots,\ x_n) & \text{»} & \psi_2, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & & \cdots \\
\psi_n(x,\ x_1,\ x_2,\ldots,\ x_n) & \text{»} & \psi_n,
\end{array}$$

et que $u_1, u_2, \ldots, u_n, u_{n+1}$ deviennent

$$\begin{array}{lcc}
w_1(x,\ x_1,\ x_2,\ldots,\ x_n) & \text{ou, par abréviation,} & w_1, \\
w_2(x,\ x_1,\ x_2,\ldots,\ x_n) & \text{»} & w_2, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & & \cdots \\
w_n(x,\ x_1,\ x_2,\ldots,\ x_n) & \text{»} & w_n, \\
w_{n+1}(x,\ x_1,\ x_2,\ldots,\ x_n) & \text{»} & w_{n+1}.
\end{array}$$

On voit immédiatement que, par ce changement des variables, les formules (10) et (11) se transforment en (8) et (9), et qu'il s'agit de trouver ce que deviennent $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{V}_n$, $\mathfrak{V}_{n+1}$ et l'équation (16), si à l'aide des équations (17) nous en éliminons $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$.

1° En vertu de la proposition de M. Jacobi, ci-dessus rappelée dans le Lemme I (voir *Journal de Crelle,* t. XXII, p. 340), nous tirons sans difficulté de la formule (15)

$$(18) \qquad \mathfrak{P} = \frac{1}{\Delta(\varphi)} \cdot \begin{vmatrix}
\frac{dw_1}{dx}, & \frac{dw_1}{dx_1}, \ldots, & \frac{dw_1}{dx_n} \\
\frac{dw_2}{dx}, & \frac{dw_2}{dx_1}, \ldots, & \frac{dw_2}{dx_n} \\
\cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\
\frac{dw_n}{dx}, & \frac{dw_n}{dx_1}, \ldots, & \frac{dw_n}{dx_n} \\
\frac{dw_{n+1}}{dx}, & \frac{dw_{n+1}}{dx_1}, \ldots, & \frac{dw_{n+1}}{dx_n}
\end{vmatrix}$$

2° Quant à $\mathfrak{V}_n$ et $\mathfrak{V}_{n+1}$, nous observons en premier lieu que la différentiation partielle des équations (17) par rapport à φ_k donnera

$$
\begin{aligned}
0 &= \frac{d\varphi_1}{\mathrm{d}x_1}\cdot\frac{dx_1}{\mathrm{d}\varphi_k} + \ldots + \frac{d\varphi_1}{\mathrm{d}x_r}\cdot\frac{dx_r}{\mathrm{d}\varphi_k} + \ldots + \frac{d\varphi_1}{\mathrm{d}x_n}\cdot\frac{dx_n}{\mathrm{d}\varphi_k},\\
0 &= \frac{d\varphi_2}{\mathrm{d}x_1}\cdot\frac{dx_1}{\mathrm{d}\varphi_k} + \ldots + \frac{d\varphi_2}{\mathrm{d}x_r}\cdot\frac{dx_r}{\mathrm{d}\varphi_k} + \ldots + \frac{d\varphi_2}{\mathrm{d}x_n}\cdot\frac{dx_n}{\mathrm{d}\varphi_k},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
1 &= \frac{d\varphi_k}{\mathrm{d}x_1}\cdot\frac{dx_1}{\mathrm{d}\varphi_k} + \ldots + \frac{d\varphi_k}{\mathrm{d}x_r}\cdot\frac{dx_r}{\mathrm{d}\varphi_k} + \ldots + \frac{d\varphi_k}{\mathrm{d}x_n}\cdot\frac{dx_n}{\mathrm{d}\varphi_k},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
0 &= \frac{d\varphi_n}{\mathrm{d}x_1}\cdot\frac{dx_1}{\mathrm{d}\varphi_k} + \ldots + \frac{d\varphi_n}{\mathrm{d}x_r}\cdot\frac{dx_r}{\mathrm{d}\varphi_k} + \ldots + \frac{d\varphi_n}{\mathrm{d}x_n}\cdot\frac{dx_n}{\mathrm{d}\varphi_k},
\end{aligned}
$$

d'où il suit

$$
\Delta(\varphi).\,\frac{dx_r}{\mathrm{d}\varphi_k} = \begin{vmatrix}
\frac{d\varphi_1}{\mathrm{d}x_1},\ldots, & \frac{d\varphi_1}{\mathrm{d}x_{r-1}}, & 0, & \frac{d\varphi_1}{\mathrm{d}x_{r+1}},\ldots, & \frac{d\varphi_1}{\mathrm{d}x_n}\\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\
\frac{d\varphi_k}{\mathrm{d}x_1},\ldots, & \frac{d\varphi_k}{\mathrm{d}x_{r-1}}, & 1, & \frac{d\varphi_k}{\mathrm{d}x_{r+1}},\ldots, & \frac{d\varphi_k}{\mathrm{d}x_n}\\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\
\frac{d\varphi_n}{\mathrm{d}x_1},\ldots, & \frac{d\varphi_n}{\mathrm{d}x_{r-1}}, & ,0 & \frac{d\varphi_n}{\mathrm{d}x_{r+1}},\ldots, & \frac{d\varphi_n}{\mathrm{d}x_n}
\end{vmatrix}
$$

et, si l'on multiplie par $\left(\psi_k - \frac{d\varphi_k}{\mathrm{d}x}\right)\cdot\frac{dw_n}{\mathrm{d}x_r}$,

$$
\Delta(\varphi)\left(\psi_k - \frac{d\varphi_k}{\mathrm{d}x}\right)\cdot\frac{dw_n}{\mathrm{d}x_r}\cdot\frac{dx_r}{\mathrm{d}\varphi_k} = \begin{vmatrix}
\frac{d\varphi_1}{\mathrm{d}x_1},\ldots, & \frac{d\varphi_1}{\mathrm{d}x_{r-1}}, & 0, & \frac{d\varphi_1}{\mathrm{d}x_{r+1}},\ldots, & \frac{d\varphi_1}{\mathrm{d}x_n}\\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\
\frac{d\varphi_k}{\mathrm{d}x_1},\ldots, & \frac{d\varphi_k}{\mathrm{d}x_{r-1}}, & \left(\psi_k - \frac{d\varphi_k}{\mathrm{d}x}\right)\cdot\frac{dw_n}{\mathrm{d}x_r}, & \frac{d\varphi_k}{\mathrm{d}x_{r+1}},\ldots, & \frac{d\varphi_k}{\mathrm{d}x_n}\\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\
\frac{d\varphi_n}{\mathrm{d}x_1},\ldots, & \frac{d\varphi_n}{\mathrm{d}x_{r-1}}, & 0, & \frac{d\varphi_n}{\mathrm{d}x_{r+1}},\ldots, & \frac{d\varphi_n}{\mathrm{d}x_k}
\end{vmatrix}
$$

Prenons-en la somme depuis $k = 1$ jusqu'à $k = n$; alors, en observant ce que devient la notation (4) pour

$$
v_k = \left(\psi_k - \frac{d\varphi_k}{\mathrm{d}x}\right)\cdot\frac{dw_n}{\mathrm{d}x_r},
$$

nous aurons

$$\Delta(\varphi).\sum_{1}^{n}{}_{k}\left(\psi_k-\frac{d\varphi_k}{\mathrm{d}x}\right)\cdot\frac{dw_n}{\mathrm{d}x_r}\cdot\frac{dx_r}{\mathrm{d}\varphi_k}=\mathrm{F}_{\varphi}^{(x_r)}\left[\left(\psi-\frac{d\varphi}{\mathrm{d}x}\right)\cdot\frac{dw_n}{\mathrm{d}x_r}\right],$$

d'où, en sommant encore depuis $r=1$ jusqu'à $r=n$, on déduit

$$(19)\qquad \sum_{1}^{n}{}_{r}\sum_{1}^{n}{}_{k}\left(\psi_k-\frac{d\varphi_k}{\mathrm{d}x}\right)\cdot\frac{dw_n}{\mathrm{d}x_r}\cdot\frac{dx_r}{\mathrm{d}\varphi_k}=\frac{\sum_{1}^{n}{}_{r}\mathrm{F}_{\varphi}^{(x_r)}\left[\left(\psi-\frac{d\varphi}{\mathrm{d}x}\right)\cdot\frac{dw_n}{\mathrm{d}x_r}\right]}{\Delta(\varphi)}.$$

Or, en vertu de la relation entre w_n et u_n, on aura sans difficulté l'équation

$$\frac{dw_n}{\mathrm{d}x}=\frac{du_n}{\mathrm{d}x}+\sum_{1}^{n}{}_{k}\cdot\frac{du_n}{\mathrm{d}\varphi_k}\cdot\frac{d\varphi_k}{\mathrm{d}x},$$

qui, étant retranchée de l'équation (14), donnera, en observant la transition de p_k en ψ_k,

$$\mathfrak{V}_n=\frac{dw_n}{\mathrm{d}x}+\sum_{1}^{n}{}_{k}\left(\psi_k-\frac{d\varphi_k}{\mathrm{d}x}\right)\cdot\frac{du_n}{\mathrm{d}\varphi_k}.$$

Mais d'un autre côté on trouvera aussi

$$\frac{du_n}{\mathrm{d}\varphi_k}=\sum_{1}^{n}{}_{r}\frac{dw_n}{\mathrm{d}x_r}\cdot\frac{dx_r}{\mathrm{d}\varphi_k},$$

d'où il suit

$$\mathfrak{V}_n=\frac{dw_n}{\mathrm{d}x}+\sum_{1}^{n}{}_{r}\cdot\sum_{1}^{n}{}_{k}\left(\psi_k-\frac{d\varphi_k}{\mathrm{d}x}\right)\cdot\frac{dw_n}{\mathrm{d}x_r}\cdot\frac{dx_r}{\mathrm{d}\varphi_k},$$

c'est-à-dire, en vertu de l'équation (19),

$$(20)\qquad \mathfrak{V}_n=\frac{dw_n}{\mathrm{d}x}+\frac{\sum_{1}^{n}{}_{r}\mathrm{F}_{\varphi}^{(x_r)}\left[\left(\psi-\frac{d\varphi}{\mathrm{d}x}\right)\cdot\frac{dw_n}{\mathrm{d}x_r}\right]}{\Delta(\varphi)}.$$

En mettant ici dans $\mathfrak{V}_n$ et w, $n+1$ à la place de n, on obtiendra encore

$$(21)\qquad \mathfrak{V}_{n+1} = \frac{dw_{n+1}}{\mathrm{d}x} + \frac{\sum_r^{1,n} \mathrm{F}_\varphi^{(x_r)}\left[\left(\psi - \frac{d\varphi}{\mathrm{d}x}\right)\cdot\frac{dw_{n+1}}{\mathrm{d}x_r}\right]}{\Delta(\varphi)}.$$

3° Reste à trouver ce que devient l'équation (16) en y exprimant les valeurs de $\varphi_1, \varphi_2,\ldots, \varphi_n$, en $x, x_1,\ldots, x_n$. Or, la relation entre p_k et ψ_k donnera

$$\frac{dp_k}{\mathrm{d}\varphi_k} = \sum_r^{1,n} \frac{d\psi_k}{\mathrm{d}x_r}\cdot\frac{dx_r}{\mathrm{d}\varphi_k},$$

d'où, en prenant la somme depuis $k=1$ jusqu'à $k=n$, on aura

$$\sum_k^{1,n}\cdot\frac{dp_k}{\mathrm{d}\varphi_k} = \sum_k^{1,n}\cdot\sum_r^{1,n}\frac{d\psi_k}{\mathrm{d}x_r}\cdot\frac{dx_r}{\mathrm{d}\varphi_k},$$

et à l'aide de l'équation (19), en y mettant $\frac{d\psi_k}{\mathrm{d}x_r}$ à la place de $\left(\psi_k - \frac{d\varphi_k}{\mathrm{d}x}\right)\cdot\frac{dw_n}{\mathrm{d}x_r}$,

$$\Delta(\varphi)\cdot\sum_k^{1,n}\cdot\frac{dp_k}{\mathrm{d}\varphi_k} = \sum_r^{1,n}\mathrm{F}_\varphi^{(x_r)}\left(\frac{d\psi}{\mathrm{d}x_r}\right).$$

Donc, en désignant par $\mathfrak{M}$ ce que devient $\mathfrak{N}$ si l'on y substitue les valeurs de $\varphi_1, \varphi_2,\ldots, \varphi_n$ données par les équations (17), on voit clairement que l'équation (16) sera changée en celle-ci :

$$(22)\qquad \Delta(\varphi)\cdot\frac{\mathrm{d}\log\mathfrak{M}}{\mathrm{d}x} + \sum_r^{1,n}\mathrm{F}_\varphi^{(x_r)}\left(\frac{d\varphi}{\mathrm{d}x_r}\right) = 0.$$

Par conséquent, en vertu des formules ci-dessus trouvées, (18), (20), (21) et (22), il résulte de la proposition de M. Jacobi que, si l'on a trouvé aux équations différentielles simultanées

$$(22\,bis)\qquad \mathrm{d}\varphi_1 = \psi_1\mathrm{d}x,\quad \mathrm{d}\varphi_2 = \psi_2\mathrm{d}x,\ldots,\quad \mathrm{d}\varphi_n = \psi_n\mathrm{d}x$$

35..

(où $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ et $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n$ sont fonctions de $x, x_1, x_2, \ldots, x_n$) $n-1$ intégrales

$$\begin{aligned} w_1\ (x, x_1, x_2, \ldots, x_n) &= \alpha_1, \\ w_2\ (x, x_1, x_2, \ldots, x_n) &= \alpha_2, \\ &\ldots\ldots\ldots \\ w_{n-1}(x, x_1, x_2, \ldots, x_n) &= \alpha_{n-1}, \end{aligned}$$

et qu'on prenne arbitrairement deux autres fonctions, savoir :

$$\begin{aligned} &w_n\ (x, x_1, x_2, \ldots, x_n), \text{ ou, par abréviation, } w_n, \\ &w_{n+1}(x, x_1, x_2, \ldots, x_n), \qquad \text{»} \qquad w_{n+1}, \end{aligned}$$

on aura

$$\int \frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{P}} (\mathfrak{V}_{n+1}\, d w_n - \mathfrak{V}_n\, d w_{n+1}) = \text{const.},$$

pour l'intégrale $n^{ième}$ restante des équations (22 *bis*), pourvu que $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{V}_n$, et $\mathfrak{V}_{n+1}$ aient les valeurs données dans les équations (18), (20) et (21), et que $\mathfrak{M}$ soit une expression quelconque qui satisfasse à l'équation (22).

Or, en supposant

$$w_n = x_i, \quad w_{n+1} = x,$$

d'où il suit

$$\frac{dw_n}{dx_r} = 0 \quad \text{pour} \quad r >< i \quad \text{et} \quad \frac{dw_n}{dx_i} = 1,$$

$$\frac{dw_{n+1}}{dx_r} = 0 \quad \text{pour} \quad r > 0 \quad \text{et} \quad \frac{dw_{n+1}}{dx} = 1,$$

on tirera des équations (20), (21) et (18)

$$\begin{aligned} \mathfrak{V}_n &= \frac{F_\varphi^{(x_i)}\left(\psi - \frac{d\varphi}{dx}\right)}{\Delta(\varphi)}, \\ \mathfrak{V}_{n+1} &= 1, \\ \mathfrak{P} &= \pm\, \mathfrak{Q}_{n-1}\left(\frac{dw_n}{dx_i}\right) \cdot \frac{1}{\Delta(\varphi)}. \end{aligned}$$

Le théorème I est donc pleinement démontré.

§ VI.

Dans ce qui précède, nous avons fait résulter le théorème I d'une proposition qu'a démontrée M. Jacobi dans sa *Theoria novi multiplicatoris*. Cependant, pour en faire notre théorème tout à fait indépendant, nous en donnerons ci-après une démonstration plus directe, qui ne tient nullement à cette théorie difficile et compliquée.

En effet, écrivons les équations (8) de cette manière :

$$(23)\quad \left\{\begin{array}{l} \left(\frac{d\varphi_1}{dx} - \psi_1\right) dx + \frac{d\varphi_1}{dx_1} dx_1 + \ldots + \frac{d\varphi_1}{dx_i} dx_i + \ldots + \frac{d\varphi_1}{dx_n} dx_n = 0, \\ \left(\frac{d\varphi_2}{dx} - \psi_2\right) dx + \frac{d\varphi_2}{dx_1} dx_1 + \ldots + \frac{d\varphi_2}{dx_i} dx_i + \ldots + \frac{d\varphi_2}{dx_n} dx_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \left(\frac{d\varphi_n}{dx} - \psi_n\right) dx + \frac{d\varphi_n}{dx_1} dx_1 + \ldots + \frac{d\varphi_n}{dx_i} dx_i + \ldots + \frac{d\varphi_n}{dx_n} dx_n = 0; \end{array}\right.$$

en éliminant dx_1, $dx_2, \ldots, dx_{i-1}$, $dx_{i+1}, \ldots, dx_n$, nous aurons pour la détermination de l'intégrale $n^{ième}$ restante

$$(24)\qquad \Delta(\varphi).dx_i - F_\varphi^{(x_i)}\left(\psi - \frac{d\varphi}{dx}\right).dx = 0,$$

où, en vertu de l'équation (9), les variables x_1, $x_2, \ldots, x_{i-1}, \ldots$, x_{i+1}, x_n sont à considérer comme fonctions connues de x et x_i. Or supposons que $\mathfrak{M}$ soit le facteur qui rend intégrable cette équation différentielle; pour cela il faut qu'il soit tel, que (*)

$$\frac{d_1[\mathfrak{M}.\Delta(\varphi)]}{dx} + \frac{d_1\left[\mathfrak{M}.F_\varphi^{(x_i)}\left(\psi - \frac{d\varphi}{dx}\right)\right]}{dx_i} = 0,$$

(*) En supposant que u soit une fonction de x, x_1, $x_2, \ldots, x_n$ et que x_1, $x_2, \ldots, x_{i-1}$, $x_{i+1}, \ldots, x_n$ soient elles-mêmes fonctions de x et x_i, nous désignons par

$$\frac{d_1 u}{dx}$$

la dérivée partielle de u par rapport à x, non-seulement en tant que x *explicite* entre dans u, mais aussi en tant qu'il y entre *implicite* dans x_1, $x_2, \ldots, x_{i-1}$, $x_{i+1}, \ldots, x_n$.

ou, ce qui revient au même,

$$(25)\qquad \Delta(\varphi)\cdot\frac{\mathrm{d}\log\mathfrak{M}}{\mathrm{d}x}+\frac{d_1\Delta(\varphi)}{\mathrm{d}x}+\frac{d_1\,\mathrm{F}_\varphi^{(x_i)}\left(\psi-\dfrac{d\varphi}{\mathrm{d}x}\right)}{\mathrm{d}x_i}=0.$$

Mais en désignant par $\sum_k^{(i)}$ la somme pour $k=1, 2,\ldots, i-1, i+1,\ldots, n$, c'est-à-dire, la somme depuis $k=1$ jusqu'à $k=n$, excepté pour $k=i$, on voit sans difficulté que

$$\frac{d_1\Delta(\varphi)}{\mathrm{d}x}=\frac{d\Delta(\varphi)}{\mathrm{d}x}+\sum_k^{(i)}\frac{d\Delta(\varphi)}{\mathrm{d}x_k}\cdot\frac{dx_k}{\mathrm{d}x},$$

$$\frac{d_1\,\mathrm{F}_\varphi^{(x_i)}\left(\psi-\dfrac{d\varphi}{\mathrm{d}x}\right)}{\mathrm{d}x_i}=\frac{d\mathrm{F}_\varphi^{(x_i)}\left(\psi-\dfrac{d\varphi}{\mathrm{d}x}\right)}{\mathrm{d}x_i}+\sum_k^{(i)}\cdot\frac{d\mathrm{F}_\varphi^{(x_i)}\left(\psi-\dfrac{d\varphi}{\mathrm{d}x}\right)}{\mathrm{d}x_k}\cdot\frac{dx_k}{\mathrm{d}x_i},$$

ce qui, substitué dans l'équation (25), donnera

$$(26)\quad\left\{\begin{aligned}&\Delta(\varphi)\cdot\frac{\mathrm{d}\log\mathfrak{M}}{\mathrm{d}x}+\frac{d\Delta(\varphi)}{\mathrm{d}x}+\frac{d.\mathrm{F}_\varphi^{(x_i)}\left(\psi-\dfrac{d\varphi}{\mathrm{d}x}\right)}{\mathrm{d}x_i}\\&\qquad+\sum_k^{(i)}\cdot\frac{d\Delta(\varphi)}{\mathrm{d}x_k}\cdot\frac{dx_k}{\mathrm{d}x}+\sum_k^{(i)}\cdot\frac{d\ \mathrm{F}_\varphi^{(x_i)}\left(\psi-\dfrac{d\varphi}{\mathrm{d}x}\right)}{\mathrm{d}x_k}\cdot\frac{dx_k}{\mathrm{d}x_i}=0.\end{aligned}\right.$$

Au moyen des relations (9) il vient

$$\frac{dw_1}{\mathrm{d}x_1}\mathrm{d}x_1+\ldots+\frac{dw_1}{\mathrm{d}x_{i-1}}\mathrm{d}x_{i-1}+\frac{dw_1}{\mathrm{d}x_{i+1}}\mathrm{d}x_{i+1}+\ldots+\frac{dw_1}{\mathrm{d}x_n}\cdot\mathrm{d}x_n=-\left(\frac{dw_1}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x+\frac{dw_1}{\mathrm{d}x_i}\,\mathrm{d}x_i\right),$$

$$\frac{dw_2}{\mathrm{d}x_1}\mathrm{d}x_1+\ldots+\frac{dw_2}{\mathrm{d}x_{i-1}}\mathrm{d}x_{i-1}+\frac{dw_2}{\mathrm{d}x_{i+1}}\mathrm{d}x_{i+1}+\ldots+\frac{dw_2}{\mathrm{d}x_n}\cdot\mathrm{d}x_n=-\left(\frac{dw_2}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x+\frac{dw_2}{\mathrm{d}x_i}\,\mathrm{d}x_i\right),$$

. . . .

$$\frac{dw_{n-1}}{\mathrm{d}x_1}\mathrm{d}x_1+\ldots+\frac{dw_{n-1}}{\mathrm{d}x_{i-1}}\mathrm{d}x_{i-1}+\frac{dw_{n-1}}{\mathrm{d}x_{i+1}}\mathrm{d}x_{i+1}+\ldots+\frac{dw_{n-1}}{\mathrm{d}x_n}\cdot\mathrm{d}x_n=-\left(\frac{dw_{n-1}}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+\frac{dw_{n-1}}{\mathrm{d}x_i}\mathrm{d}x_i\right),$$

d'ou, en faisant, pour abréger,

$$(27)\qquad a = \begin{vmatrix} \frac{d\omega_1}{\mathrm{d}x_1},\ldots, & \frac{d\omega_1}{\mathrm{d}x_{i-1}}, & \frac{d\omega_1}{\mathrm{d}x_{i+1}},\ldots, & \frac{d\omega_1}{\mathrm{d}x_n} \\ \frac{d\omega_2}{\mathrm{d}x_1},\ldots, & \frac{d\omega_2}{\mathrm{d}x_{i-1}}, & \frac{d\omega_2}{\mathrm{d}x_{i+1}},\ldots, & \frac{d\omega_2}{\mathrm{d}x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{d\omega_{n-1}}{\mathrm{d}x_1},\ldots, & \frac{d\omega_{n-1}}{\mathrm{d}x_{i-1}}, & \frac{d\omega_{n-1}}{\mathrm{d}x_{i+1}},\ldots, & \frac{d\omega_{n-1}}{\mathrm{d}x_{i+1}} \end{vmatrix}$$

$$(28)\qquad \mathcal{A}_k(i) = \begin{vmatrix} \frac{d\omega_1}{\mathrm{d}x_1},\ldots, & \frac{d\omega_1}{\mathrm{d}x_{i-1}}, & \frac{d\omega_1}{\mathrm{d}x_{i+1}},\ldots, & \frac{d\omega_1}{\mathrm{d}x_{k-1}}, & \frac{d\omega_1}{\mathrm{d}x}, & \frac{d\omega_1}{\mathrm{d}x_{k+1}},\ldots, & \frac{d\omega_1}{\mathrm{d}x_n} \\ \frac{d\omega_2}{\mathrm{d}x_1},\ldots, & \frac{d\omega_2}{\mathrm{d}x_{i-1}}, & \frac{d\omega_2}{\mathrm{d}x_{i+1}},\ldots, & \frac{d\omega_2}{\mathrm{d}x_{k-1}}, & \frac{d\omega_2}{\mathrm{d}x}, & \frac{d\omega_2}{\mathrm{d}x_{k+1}},\ldots, & \frac{d\omega_2}{\mathrm{d}x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{d\omega_{n-1}}{\mathrm{d}x_1},\ldots, & \frac{d\omega_{n-1}}{\mathrm{d}x_{i-1}}, & \frac{d\omega_{n-1}}{\mathrm{d}x_{i+1}},\ldots, & \frac{d\omega_{n-1}}{\mathrm{d}x_{k-1}}, & \frac{d\omega_{n-1}}{\mathrm{d}x}, & \frac{d\omega_{n-1}}{\mathrm{d}x_{k+1}},\ldots, & \frac{d\omega_{n-1}}{\mathrm{d}x_n} \end{vmatrix}$$

$$\mathcal{A}'_k(i) = \begin{vmatrix} \frac{d\omega_1}{\mathrm{d}x_1},\ldots, & \frac{d\omega_1}{\mathrm{d}x_{i-1}}, & \frac{d\omega_1}{\mathrm{d}x_{i+1}},\ldots, & \frac{d\omega_1}{\mathrm{d}x_{k-1}}, & \frac{d\omega_1}{\mathrm{d}x_i}, & \frac{d\omega_1}{\mathrm{d}x_{k+1}},\ldots, & \frac{d\omega_1}{\mathrm{d}x_n} \\ \frac{d\omega_2}{\mathrm{d}x_1},\ldots, & \frac{d\omega_2}{\mathrm{d}x_{i-1}}, & \frac{d\omega_2}{\mathrm{d}x_{i+1}},\ldots, & \frac{d\omega_2}{\mathrm{d}x_{k-1}}, & \frac{d\omega_2}{\mathrm{d}x_i}, & \frac{d\omega_2}{\mathrm{d}x_{k+1}},\ldots, & \frac{d\omega_2}{\mathrm{d}x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{d\omega_{n-1}}{\mathrm{d}x_1},\ldots, & \frac{d\omega_{n-1}}{\mathrm{d}x_{i-1}}, & \frac{d\omega_{n-1}}{\mathrm{d}x_{i+1}},\ldots, & \frac{d\omega_{n-1}}{\mathrm{d}x_{k-1}}, & \frac{d\omega_{n-1}}{\mathrm{d}x_i}, & \frac{d\omega_{n-1}}{\mathrm{d}x_{k+1}},\ldots, & \frac{d\omega_{n-1}}{\mathrm{d}x_n} \end{vmatrix}$$

il résultera

$$(29)\qquad a\,\mathrm{d}x_k = -\mathcal{A}_k(i).\mathrm{d}x - \mathcal{A}'_k(i).\mathrm{d}x_i,$$

et partant

$$a\cdot\frac{dx_k}{\mathrm{d}x} = -\mathcal{A}_k(i),$$

$$a\cdot\frac{dx_k}{\mathrm{d}x_i} = -\mathcal{A}'_k(i),$$

ce qui, substitué dans l'équation (26), donnera

$$(30)\quad \left\{ \begin{aligned} & a.\Delta(\varphi)\cdot\frac{\mathrm{d}\log\mathcal{N}}{\mathrm{d}x} + a\cdot\frac{d\Delta(\varphi)}{\mathrm{d}x} + a\cdot\frac{d.\mathrm{F}_\varphi^{(x_i)}\left(\psi-\frac{d\varphi}{\mathrm{d}x}\right)}{\mathrm{d}x_i} \\ & \qquad -\sum_k^{(i)}\left[\mathcal{A}_k(i)\cdot\frac{d\Delta(\varphi)}{\mathrm{d}x_k} + \mathcal{A}'_k(i)\cdot\frac{d.\mathrm{F}_\varphi^{(x_i)}\left(\psi-\frac{d\varphi}{\mathrm{d}x}\right)}{\mathrm{d}x_k}\right] = 0. \end{aligned} \right.$$

Substituons dans l'équation (29) les valeurs de $\mathrm{d}x_k$ et $\mathrm{d}x_i$ tirées des formules (23) et (24), nous aurons l'équation

$$a.\mathrm{F}_\varphi^{(x_k)}\left(\psi-\frac{d\varphi}{\mathrm{d}x}\right)=-\Delta(\varphi)\,\mathcal{A}_k(i)-\mathrm{F}_\varphi^{(x_i)}\left(\psi-\frac{d\varphi}{\mathrm{d}x}\right)\cdot\mathcal{A}'_k(i),$$

qui, différentiée par rapport à x_k, donnera

$$(31)\qquad \left\{\begin{aligned} &\mathcal{A}_k(i)\cdot\frac{d\Delta(\varphi)}{\mathrm{d}x_k}+\mathcal{A}'_k(i)\cdot\frac{d.\mathrm{F}_\varphi^{(x_i)}\left(\psi-\frac{d\varphi}{\mathrm{d}x}\right)}{\mathrm{d}x_k}\\ &=-\Delta(\varphi)\cdot\frac{d.\mathcal{A}_k(i)}{\mathrm{d}x_k}-\mathrm{F}_\varphi^{(x_i)}\left(\psi-\frac{d\varphi}{\mathrm{d}x}\right)\cdot\frac{d.\mathcal{A}'_k(i)}{\mathrm{d}x_k}\\ &\quad-\mathrm{F}_\varphi^{(x_k)}\left(\psi-\frac{d\varphi}{\mathrm{d}x}\right)\cdot\frac{da}{\mathrm{d}x_k}-a\cdot\frac{d.\mathrm{F}_\varphi^{(x_k)}\left(\psi-\frac{d\varphi}{\mathrm{d}x}\right)}{\mathrm{d}x_k}.\end{aligned}\right.$$

De plus, en observant que

$$\begin{aligned}\sum_k^{(i)}.\mathrm{F}_\varphi^{(x_k)}\left(\psi-\frac{d\varphi}{\mathrm{d}x}\right)\cdot\frac{da}{\mathrm{d}x_k}\mathrm{d}x&=\Delta(\varphi).\sum_k^{(i)}\frac{da}{\mathrm{d}x_k}\cdot\mathrm{d}x_k\\ &=\Delta(\varphi).a.\mathrm{d}\log a-\Delta(\varphi)\cdot\frac{da}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x-\Delta(\varphi)\cdot\frac{da}{\mathrm{d}x_i}\mathrm{d}x_i\\ &=\Delta(\varphi).a.\mathrm{d}\log a-\Delta(\varphi)\cdot\frac{da}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x\\ &\qquad-\mathrm{F}_\varphi^{(x_i)}\left(\psi-\frac{d\varphi}{\mathrm{d}x}\right)\cdot\frac{da}{\mathrm{d}x_i}\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

il résultera des formules (30) et (31)

$$\begin{aligned}&a.\Delta(\varphi)\cdot\frac{\mathrm{d}\log(a\mathfrak{M})}{\mathrm{d}x}+a.\sum_{1}^{n}{}_k\frac{d.\mathrm{F}_\varphi^{(x_k)}\left(\psi-\frac{d\varphi}{\mathrm{d}x}\right)}{\mathrm{d}x_k}+a\cdot\frac{d\Delta(\varphi)}{\mathrm{d}x}\\ &-\Delta(\varphi)\left[\frac{da}{\mathrm{d}x}-\sum_k^{(i)}\frac{d\mathcal{A}_k(i)}{\mathrm{d}x_k}\right]-\mathrm{F}_\varphi^{(x_i)}\left(\psi-\frac{d\varphi}{\mathrm{d}x}\right)\left[\frac{da}{\mathrm{d}x_i}-\sum_k^{(i)}\frac{d\mathcal{A}'_k(i)}{\mathrm{d}x_k}\right]=0,\end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$(32)\left\{\begin{aligned}&a.\Delta(\varphi)\cdot\frac{\mathrm{d}\log(a\mathfrak{N})}{\mathrm{d}x}+a\sum_{k}^{n}{}_{1}\cdot\frac{d.\mathrm{F}_\varphi^{(x_k)}(\psi)}{\mathrm{d}x_k}+a\left[\frac{d\Delta(\varphi)}{\mathrm{d}x}-\sum_k^n{}_1\frac{d.\mathrm{F}_\varphi^{(x_k)}\left(\frac{d\varphi}{\mathrm{d}x}\right)}{\mathrm{d}x_k}\right]\\&\qquad-\Delta(\varphi)\cdot\left[\frac{da}{\mathrm{d}x}-\sum_k^{(i)}\cdot\frac{d\mathcal{A}_k(i)}{\mathrm{d}x_k}\right]\\&\qquad-\mathrm{F}_\varphi^{(x_i)}\left(\psi-\frac{d\varphi}{\mathrm{d}x}\right)\left[\frac{da}{\mathrm{d}x_i}-\sum_k^{(i)}\frac{d\mathcal{A}'_k(i)}{\mathrm{d}x_k}\right]=0,\end{aligned}\right.$$

à cause de

$$\mathrm{F}_\varphi^{(x_k)}\left(\psi-\frac{d\varphi}{\mathrm{d}x}\right)=\mathrm{F}_\varphi^{(x_k)}(\psi)-\mathrm{F}_\varphi^{(x_k)}\left(\frac{d\varphi}{\mathrm{d}x}\right).$$

Maintenant soit

$$(33)\qquad \mathfrak{B}_k=\begin{vmatrix}\frac{d\varphi_1}{\mathrm{d}x}, & \frac{d\varphi_1}{\mathrm{d}x_1},\ldots, & \frac{d\varphi_1}{\mathrm{d}x_{k-1}}, & \frac{d\varphi_1}{\mathrm{d}x_{k+1}},\ldots, & \frac{d\varphi_1}{\mathrm{d}x_n}\\ \frac{d\varphi_2}{\mathrm{d}x}, & \frac{d\varphi_2}{\mathrm{d}x_1},\ldots, & \frac{d\varphi_2}{\mathrm{d}x_{k-1}}, & \frac{d\varphi_2}{\mathrm{d}x_{k+1}},\ldots, & \frac{d\varphi_2}{\mathrm{d}x_n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \frac{d\varphi_n}{\mathrm{d}x}, & \frac{d\varphi_n}{\mathrm{d}x_1},\ldots, & \frac{d\varphi_n}{\mathrm{d}x_{k-1}}, & \frac{d\varphi_n}{\mathrm{d}x_{k+1}},\ldots, & \frac{d\varphi_n}{\mathrm{d}x_n}\end{vmatrix},$$

alors il suit du Lemme II que

$$\sum_k^n{}_0(-1)^k\frac{d\mathfrak{B}_k}{\mathrm{d}x_k}=\frac{d\mathfrak{B}_0}{\mathrm{d}x}+\sum_k^n{}_1(-1)^k\frac{d\mathfrak{B}_k}{\mathrm{d}x_k}=0.$$

Mais, eu égard aux notations (3) et (4), on aura

$$\frac{d\mathfrak{B}_0}{\mathrm{d}x}=\frac{d\Delta(\varphi)}{\mathrm{d}x},$$

et pour $k>0$,

$$\frac{d\mathfrak{B}_k}{\mathrm{d}x_k}=-(-1)^k\frac{d.\,\mathrm{F}_\varphi^{(x_k)}\left(\frac{d\varphi}{\mathrm{d}x}\right)}{\mathrm{d}x_k}.$$

Donc

$$(34)\qquad \frac{d\Delta(\varphi)}{dx} - \sum_{k}^{n}{}_{1} \frac{d.\,F_{\varphi}^{(x_k)}\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)}{dx_k} = 0.$$

Pareillement, si l'on pose

$$\mathfrak{I}_k(w_n) = \begin{vmatrix} \frac{dw_1}{dx}, & \frac{dw_1}{dx_1}, \ldots, & \frac{dw_1}{dx_{k-1}}, & \frac{dw_1}{dx_{k+1}}, \ldots, & \frac{dw_1}{dx_n} \\ \frac{dw_2}{dx}, & \frac{dw_2}{dx_1}, \ldots, & \frac{dw_2}{dx_{k-1}}, & \frac{dw_2}{dx_{k+1}}, \ldots, & \frac{dw_2}{dx_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{dw_n}{dx}, & \frac{dw_n}{dx_1}, \ldots, & \frac{dw_n}{dx_{k-1}}, & \frac{dw_n}{dx_{k+1}}, \ldots, & \frac{dw_n}{dx_n} \end{vmatrix}$$

il résultera encore du Lemme II que

$$\sum_{k}^{n}{}_{0} (-1)^k \cdot \frac{d.\,\mathfrak{I}_k(w_n)}{dx_k} = \frac{d.\,\mathfrak{I}_0(w_n)}{dx} + \sum_{k}^{n}{}_{1} (-1)^k \cdot \frac{d.\,\mathfrak{I}_k(w_n)}{dx_k} = 0,$$

d'où, en observant qu'en vertu des formules (27) et (28) on a pour $w_n = x_i$,

$$\mathfrak{I}_0(x_i) = (-1)^{n+i}.a,$$
$$\mathfrak{I}_i(x_i) = 0,$$
$$\mathfrak{I}_k(x_i) = -(-1)^{n+i+k}\mathcal{A}_k(i),\ k \text{ étant } > 0,$$

on conclura, après la division par $(-1)^{n+i}$,

$$(35)\qquad \frac{da}{dx} - \sum_{k}^{(i)} \cdot \frac{d.\,\mathcal{A}_k(i)}{dx_k} = 0.$$

Enfin, si nous permutons ici dx et dx_i, l'expression a ne subira aucune altération; mais $\mathcal{A}_k(i)$ sera changé en $\mathcal{A}'_k(i)$; la formule (35) donnera

$$(36)\qquad \frac{da}{dx_i} - \sum_{k}^{(i)} \frac{d\mathcal{A}'_k(i)}{dx_k} = 0.$$

Maintenant, eu égard aux formules (34), (35) et (36) que nous venons de trouver, nous tirerons de l'équation (32)

$$\Delta(\varphi)\cdot\frac{\mathrm{d}\log(a\mathfrak{N})}{\mathrm{d}x}+\sum_{1}^{n}{}_k\frac{d\,\mathrm{F}^{(x_k)}(\psi)}{\mathrm{d}x_k}=0,$$

c'est-à-dire en vertu du Lemme III,

$$\Delta(\varphi).\,\frac{\mathrm{d}\log(a\mathfrak{N})}{\mathrm{d}x}+\sum_{1}^{n}{}_k\mathrm{F}_{\varphi}^{(x_k)}\left(\frac{d\psi}{\mathrm{d}x_k}\right)=0.$$

En faisant

$$a\mathfrak{N}=\mathfrak{M},$$

le facteur, qui rend l'équation (24) intégrable, sera

$$\mathfrak{N}=\frac{\mathfrak{M}}{a}=\frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{Q}_{n-1}\left(\frac{dw_n}{\mathrm{d}x_i}\right)},$$

pourvu que $\mathfrak{M}$ soit une expression quelconque, qui satisfasse à

$$\Delta(\varphi).\,\frac{\mathrm{d}\log\mathfrak{M}}{\mathrm{d}x}+\sum_{1}^{n}{}_k\mathrm{F}_{\varphi}^{(x_k)}\left(\frac{d\psi}{\mathrm{d}x_k}\right).$$

C'est ce qu'il fallait démontrer.

§ VII.

En vertu du Lemme I^er on a

$$\mathfrak{Q}_{n-1}\left(\frac{dw_n}{\mathrm{d}x_i}\right)\cdot\mathfrak{Q}_{n-1}\left(\frac{dx_i}{\mathrm{d}\alpha_n}\right)=\mathfrak{Q}_{n-1}\left(\frac{dw_n}{\mathrm{d}\alpha_n}\right)=1;$$

de plus, il suit de la proposition de Jacobi que nous avons rappelée ci-dessus, que (*)

$$\Delta(\varphi).\varpi_{n-1}\left(\frac{dx_i}{d\alpha_n}\right) = \mathrm{F}_\varphi^{(\alpha_n)}\left(\frac{d\varphi}{dx_i}\right),$$

$$\mathrm{F}_\varphi^{(x_i)}(\nu).\varpi_{n-1}\left(\frac{dx_i}{d\alpha_n}\right) = \mathrm{F}_\varphi^{(x_n)}(\nu).$$

A l'aide de ces trois formules, on obtiendra sans difficulté

$$\frac{\Delta(\varphi).\,dx_i - \mathrm{F}_\varphi^{(x_i)}\left(\psi - \frac{d\varphi}{dx}\right)dx}{\varpi_{n-1}\left(\frac{dw_n}{dx_i}\right)} = \mathrm{F}_\varphi^{(\alpha_n)}\left(\frac{d\varphi}{dx_i}\right).\,dx_i - \mathrm{F}_\varphi^{(\alpha_n)}\left(\psi - \frac{d\varphi}{dx}\right)dx,$$

et l'on déduit du théorème I[er] la proposition suivante :

THÉORÈME II. — *Soient*

$$\varphi_1,\ \varphi_2,\ldots,\ \varphi_n,$$
$$\psi_1,\ \psi_2,\ldots,\ \psi_n,$$

des fonctions de $x, x_1, x_2, \ldots, x_n$. Considérons les équations différentielles simultanées

$$(37)\qquad \begin{cases} d\varphi_1 = \psi_1\,dx, \\ d\varphi_2 = \psi_2\,dx, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ d\varphi_n = \psi_n\,dx, \end{cases}$$

et supposons qu'on en ait trouvé $n-1$ intégrales

$$w_1 = \alpha_1,\quad w_2 = \alpha_2,\ldots,\quad w_{n-1} = \alpha_{n-1};$$

alors si, à l'aide de ces $n-1$ équations, on exprime les valeurs de

$$x_1,\ x_2,\ldots\ x_{i-1},\ x_{i+1},\ldots,\ x_n,$$

(*) La signification de $\mathrm{F}_\varphi^{(\alpha_n)}$ et de $\mathrm{F}_\varphi^{(x_r)}$ est fixée par la formule (4).

en x et x_i, l'expression

$$\mathfrak{M}\left[\mathrm{F}_{\varphi}^{(\alpha_n)}\left(\frac{d\varphi}{\mathrm{d}x_i}\right)\cdot\mathrm{d}x_i - \mathrm{F}_{\varphi}^{(\alpha_n)}\left(\psi - \frac{d\varphi}{\mathrm{d}x}\right)\cdot\mathrm{d}x\right]$$

sera une différentielle exacte, et l'on aura

$$\int\mathfrak{M}\left[\mathrm{F}_{\varphi}^{(\alpha_n)}\left(\frac{d\varphi}{\mathrm{d}x_i}\right)\cdot\mathrm{d}x_i - \mathrm{F}_{\varphi}^{(\alpha_n)}\left(\psi - \frac{d\varphi}{\mathrm{d}x}\right)\cdot\mathrm{d}x\right] = \text{const.}$$

pour l'intégrale n^{ieme} restante des équations (37), *pourvu que* $\mathfrak{M}$ *soit tel, qu'il satisfasse à*

$$\Delta(\varphi)\cdot\frac{\mathrm{d}\log\mathfrak{M}}{\mathrm{d}x} + \sum_{1}^{n}{}_{r}\,\mathrm{F}_{\varphi}^{(x_r)}\left(\frac{d\psi}{\mathrm{d}x_r}\right) = 0.$$

§ VIII.

Faisons dans le théorème I^{er} $i = 1$ et

$$x_1 = y,\quad x_2 = y',\quad x_3 = y'',\ldots,\quad x_n = y^{(n-1)},$$

où, comme à l'ordinaire,

$$y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x},\quad y'' = \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2},\ldots,\quad y^{(n-1)} = \frac{\mathrm{d}^{n-1}y}{\mathrm{d}x^{n-1}};$$

en supposant

$$\begin{array}{ll} \varphi_2 = y, & \psi_2 = y', \\ \varphi_3 = y', & \psi_3 = y'', \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \\ \varphi_n = y^{(n-2)}, & \psi_n = y^{(n-1)}, \end{array}$$

le système des équations (8) se réduit à une seule équation différentielle de $n^{ième}$ ordre

$$\mathrm{d}\varphi_1 = \psi_1\,\mathrm{d}x,$$

où φ_1 et ψ_1 sont des fonctions de

$$x,\ y,\ y',\ y'',\ldots,\ y^{(n-1)}.$$

Cela posé, on voit sans difficulté que

$$\Delta(\varphi) = \begin{vmatrix} \frac{d\varphi_1}{dy}, & \frac{d\varphi_1}{dy'}, \ldots, & \frac{d\varphi_1}{dy^{(n-2)}}, & \frac{d\varphi_1}{dy^{(n-1)}} \\ 1, & 0, \ldots, & 0, & 0 \\ 0, & 1, \ldots, & 0, & 0 \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ 0, & 0, \ldots, & 1, & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{n-1} \frac{d\varphi_1}{dy^{(n-1)}},$$

$$F_{\varphi}^{x_1}\left(\psi - \frac{d\varphi}{dx}\right) = \begin{vmatrix} \psi - \frac{d\varphi}{dx}, & \frac{d\varphi_1}{dy'}, \ldots, & \frac{d\varphi_1}{dy^{(n-2)}}, & \frac{d\varphi_1}{dy^{(n-1)}} \\ y', & 0, \ldots, & 0, & 0 \\ y'', & 1, \ldots, & 0, & 0 \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ y^{(n-1)}, & 0, \ldots, & 1, & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{n-1} \cdot y' \cdot \frac{d\varphi_1}{dy^{(n-1)}}.$$

et en observant que

$$F_{\varphi}^{(x_r)}\left(\frac{d\psi}{dx_r}\right) = 0 \quad \text{pour} \quad r < n,$$

$$F_{\varphi}^{(x_n)}\left(\frac{d\psi}{dx_n}\right) = (-1)^{n-1}\left(\frac{d\psi_1}{dy^{(n-1)}} - \frac{d\varphi_1}{dy^{(n-2)}}\right),$$

on obtiendra ce

THÉORÈME III. — *Soient φ et ψ deux fonctions de*

$$x,\ y,\ y',\ y'', \ldots,\ y^{(n-1)},$$

et

$$d\varphi = \psi \,.\, dx \tag{38}$$

une équation différentielle du $n^{\text{ième}}$ ordre, dont on a trouvé $n-1$ intégrales premières, savoir :

$$\begin{gathered} w_1(x,\ y,\ y' \ldots y^{(n-1)}) = \alpha_1, \\ w_2(x,\ y,\ y' \ldots y^{(n-1)}) = \alpha_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ w_{n-1}(x,\ y,\ y' \ldots y^{(n-1)}) = \alpha_{n-1}; \end{gathered}$$

alors, après avoir éliminé

$$y',\ y'',\dots,\ y^{(n-1)},$$

l'expression

$$\frac{\mathfrak{M}.\,\dfrac{d\varphi}{\mathrm{d}\,y^{(n-1)}}\,(\mathrm{d}\,y-y'\,\mathrm{d}\,x)}{\mathbb{O}_{n-1}\left(\dfrac{d\omega_n}{\mathrm{d}\,y}\right)}$$

sera une différentielle exacte, et

$$\int\frac{\mathfrak{M}.\,\dfrac{d\varphi}{\mathrm{d}\,y^{(n-1)}}\,(\mathrm{d}y-y'\,\mathrm{d}\,x)}{\mathbb{O}_{n-1}\left(\dfrac{d\omega_n}{\mathrm{d}\,y}\right)}=\text{const.}$$

sera l'intégrale générale de l'équation (38), *pourvu que* $\mathfrak{M}$ *soit une solution quelconque de*

$$(39)\qquad \frac{d\varphi}{\mathrm{d}\,y^{(n-1)}}\cdot\frac{\mathrm{d}.\log\mathfrak{M}}{\mathrm{d}x}+\frac{d\psi}{\mathrm{d}\,y^{(n-1)}}-\frac{d\varphi}{\mathrm{d}\,y^{(n-2)}}=0,$$

ou, ce qui revient au même,

$$\mathfrak{M}=e^{\int\mathrm{d}\,x\left(\frac{d\varphi}{\mathrm{d}y^{(n-2)}}-\frac{d\psi}{\mathrm{d}y^{(n-1)}}\right)\,:\,\frac{d\varphi}{\mathrm{d}y^{(n-1)}}}.$$

COROLLAIRE. — *Supposons que* φ *et* ψ *soient tels, que*

$$\frac{d\varphi}{\mathrm{d}\,y^{(n-2)}}-\frac{d\psi}{\mathrm{d}\,y^{(n-1)}}=0,$$

ce qui a toujours lieu quand $y^{(n-2)}$ *n'entre pas dans* φ *et* $y^{(n-1)}$ *n'entre pas non plus dans* ψ, *c'est-à-dire quand* φ *est une fonction de* x, y, $y',\dots,y^{(n-3)}, y^{(n-1)}$ *et qu'en même temps* ψ *est une fonction de* x, y, $y',\dots,$ $y^{(n-3)}$, $y^{(n-2)}$; *alors on a toujours*

$$\int\frac{d\varphi}{\mathrm{d}\,y^{(n-1)}}\cdot\frac{\mathrm{d}\,y-y'\,\mathrm{d}\,y}{\mathbb{O}_{n-1}\left(\dfrac{d\omega_n}{\mathrm{d}\,y}\right)}=\text{const.}$$

pour l'intégrale générale de l'équation (38), *qui, par conséquent, pourra dans ce cas être trouvée toutes les fois que $n-1$ intégrales premières sont connues.*

§ IX.

Supposons dans le théorème précédent que φ soit une fonction seulement de x, $y^{(n-2)}$, $y^{(n-1)}$ et que

$$\psi = y^{(n-1)}.f,$$

d'où

$$\frac{d\psi}{dy^{(n-1)}} = f + y^{(n-1)}.\frac{df}{dy^{(n-1)}},$$

f étant une fonction de x, y, y',..., $y^{(n-1)}$. Posons de plus

$$\mathfrak{M} = \frac{\mathfrak{M}_1}{y^{(n-1)}}.$$

Nous aurons par l'équation (39)

$$(40)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{d\varphi}{dy^{(n-1)}}\cdot\frac{d\log\mathfrak{M}_1}{dx} - \frac{1}{y^{(n-1)}}\cdot\frac{d\varphi}{dy^{(n-1)}}\cdot\frac{dy^{(n-1)}}{dx} + f + y^{(n-1)}.\frac{df}{dy^{(n-1)}}\\ &\qquad - \frac{d\varphi}{dy^{(n-2)}} = 0.\end{aligned}\right.$$

Mais en vertu de l'équation (38) nous aurons aussi la formule

$$\frac{d\varphi}{dx} = y^{(n-1)}.f = \frac{d\varphi}{dx} + y^{(n-1)}.\frac{d\varphi}{dy^{(n-2)}} + \frac{d\varphi}{dy^{(n-1)}}\cdot\frac{dy^{(n-1)}}{dx}.$$

laquelle, combinée avec l'équation (40), donnera

$$\frac{d\varphi}{d\left(\frac{1}{y^{(n-1)}}\right)}\cdot\frac{d.\log\mathfrak{M}_1}{dy^{(n-2)}} - \frac{d\varphi}{dx} + \frac{df}{d\left(\frac{1}{y^{(n-1)}}\right)} = 0.$$

Enfin, en remettant ψ à la place de f et $\mathfrak{M}$ à celle de $\mathfrak{M}_1$, nous aurons ce

THÉORÈME IV. — *Soient φ une fonction de x, $y^{(n-2)}$, $y^{(n-1)}$, et ψ une* *fonction de* x, y, $y' \ldots y^{(n-1)}$, *si l'on a trouvé à l'équation différentielle du* $n^{\text{ième}}$ *ordre*

$$(41) \qquad d\varphi = y^{(n-1)} . \psi \, dx$$

$n-1$ *intégrales premières,*

$$\begin{aligned}
w_1(x, \; y, \; y' \ldots y^{(n-1)}) &= \alpha_1, \\
w_2(x, \; y, \; y' \ldots y^{(n-1)}) &= \alpha_2, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots \\
w_{n-1}(x, \; y, \; y' \ldots y^{(n-1)}) &= \alpha_{n-1};
\end{aligned}$$

après l'élimination de $y', y'', \ldots, y^{(n-1)}$, *l'expression*

$$\frac{\mathfrak{M}}{y^{(n-1)}} \cdot \frac{d\varphi}{dy^{(n-1)}} \cdot \frac{dy - y'\,dx}{\mathfrak{D}_{n-1}\left(\dfrac{dw_n}{dy}\right)}$$

sera une différentielle exacte et

$$\int \frac{\mathfrak{M}}{y^{(n-1)}} \cdot \frac{d\varphi}{dy^{(n-1)}} \cdot \frac{dy - y'\,dx}{\mathfrak{D}_{n-1}\left(\dfrac{dw_n}{dy}\right)} = \text{const.}$$

sera l'intégrale générale de l'équation (41), *pourvu que* $\mathfrak{M}$ *soit une solution quelconque de*

$$\frac{d\varphi}{d\left(\dfrac{1}{y^{(n-1)}}\right)} \cdot \frac{d \log \mathfrak{M}}{dy^{(n-2)}} - \frac{d\varphi}{dx} + \frac{d\psi}{d\left(\dfrac{1}{y^{(n-1)}}\right)} = 0.$$

Corollaire. — *Lorsque*

$$\frac{d\varphi}{dx} - \frac{d\psi}{d\left(\dfrac{1}{y^{(n-1)}}\right)} = 0,$$

ce qui a toujours lieu quand φ *est une fonction seulement de* $y^{(n-2)}$ *et* $y^{(n-1)}$, *et qu'en même temps* ψ *est une fonction de* $x, y, y' \ldots y^{(n-2)}$, *on aura*

$$\int \frac{d\varphi}{dy^{(n-1)}} \cdot \frac{dy - y'\,dx}{y^{(n-1)} . \mathfrak{D}_{n-1}\left(\dfrac{dw_n}{dy}\right)} = \text{const.}$$

pour l'intégrale générale de l'équation (41), *qui, par conséquent, pourra toujours dans ce cas être trouvée toutes les fois que $n-1$ intégrales premières sont connues.*

A cause de leur grande généralité, les théorèmes III et IV, ou principalement leurs deux corollaires, ne seront pas peut-être sans intérêt et sans importance pour la théorie de l'intégration des équations différentielles d'un ordre quelconque.

§ X.

Nous allons à présent nous occuper d'une manière plus spéciale des équations différentielles du deuxième ordre. En effet, prenons dans les deux théorèmes précédents $n=2$, nous trouverons sans difficulté

$$\frac{d\varphi}{dy^{(n-1)}}\cdot\frac{1}{\mathfrak{D}_{n-1}\left(\frac{dw_n}{dy}\right)}=\frac{d\varphi}{dy'}\cdot\frac{dy'}{d\alpha_1}=\frac{d\varphi}{d\alpha_1},$$

et nous aurons les deux théorèmes suivants :

THÉORÈME V. — *Soient φ et ψ deux fonctions de x, y et y', et supposons qu'on ait trouvé à l'équation différentielle du deuxième ordre*

$$(42)\qquad d\varphi=\psi\,dx,$$

une intégrale première

$$w_1(x,y,y')=\alpha_1;$$

après l'élimination de y', l'expression

$$\mathfrak{M}\cdot\frac{d\varphi}{d\alpha_1}(dy-y'\,dx)$$

sera une différentielle exacte, et nous aurons

$$\int\mathfrak{M}\cdot\frac{d\varphi}{d\alpha_1}(dy-y'\,dx)=\text{const.}$$

pour l'intégrale générale de l'équation (42), $\mathfrak{M}$ *étant une solution quelconque de*

$$\frac{d\varphi}{dy'}\cdot\frac{d\log\mathfrak{M}}{dx}+\frac{d\psi}{dy'}-\frac{d\varphi}{dy}=0,$$

ou, ce qui revient au même,

$$\mathfrak{M}=e^{\int dx\left(\frac{d\varphi}{dy}-\frac{d\psi}{dy'}\right):\frac{d\varphi}{dy'}}.$$

Corollaire. — *Lorsque*

$$\frac{d\varphi}{dy}-\frac{d\psi}{dy'}=0,$$

ce qui a toujours lieu quand φ *est une fonction de* x *et* y', *et qu'en même temps* ψ *est une fonction de* x *et* y, *l'expression*

$$\frac{d\varphi}{d\alpha_1}(dy-y'dx)$$

sera une différentielle exacte, et nous aurons

$$\int\frac{d\varphi}{d\alpha_1}(dy-y'dx)=\text{const.}$$

pour l'intégrale générale de l'équation (42), *qui dans ce cas sera toujours réduite aux quadratures.*

Théorème VI. — *Soient* φ *et* ψ *deux fonctions de* x, y *et* y', *et supposons qu'on ait trouvé à l'équation différentielle du deuxième ordre*

$$d\varphi=y'\psi\,dx \tag{43}$$

une intégrale première

$$w_1(x,y,y')=\alpha_1;$$

après l'élimination de y', *l'expression*

$$\frac{\mathfrak{M}}{y'}\cdot\frac{d\varphi}{d\alpha_1}(dy-y'dx)$$

sera une différentielle exacte et nous aurons

$$\int \frac{\mathfrak{M}}{y'} \cdot \frac{d\varphi}{d\alpha_1}(dy - y'\,dx) = \text{const.}$$

pour l'intégrale générale de l'équation (43), $\mathfrak{M}$ *étant une solution quelconque de*

$$\frac{d\varphi}{d\left(\frac{1}{y'}\right)} \cdot \frac{d\log\mathfrak{M}}{dy} + \frac{d\varphi}{dx} - \frac{d\psi}{d\left(\frac{1}{y'}\right)} = 0.$$

Corollaire. — *Lorsque*

$$\frac{d\varphi}{dx} - \frac{d\psi}{d\left(\frac{1}{y'}\right)} = 0,$$

ce qui a toujours lieu quand φ *est une fonction de* y *et* y', *et qu'en même temps* ψ *est une fonction de* x *et* y, *l'expression*

$$\frac{1}{y'} \cdot \frac{d\varphi}{d\alpha_1}(dy - y'\,dx)$$

sera une différentielle exacte, et nous aurons

$$\int \frac{1}{y'} \cdot \frac{d\varphi}{d\alpha_1}(dy - y'\,dx) = \text{const.}$$

pour l'intégrale générale de l'équation (43), *qui pourra toujours dans ce cas être trouvée par des quadratures.*

Nous donnerons ci-après quelques applications des théorèmes V et VI, que nous venons de proposer.

§ XI.

EXEMPLE I^er.

Trouver la courbe dont le rayon de courbure est une fonction quelconque du rayon vecteur.

La solution de ce problème conduit à cette équation différentielle

$$\frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}=\mathfrak{F}(x^2+y^2)=\frac{1}{2f(x^2+y^2)},$$

ou, ce qui revient au même,

$$(44)\qquad \frac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}=2.f(x^2+y^2).$$

Pour en trouver l'intégrale générale, nous observons en premier lieu que la formule (44) pourra être présentée sous cette forme,

$$-\frac{\mathrm{d}\left(\frac{1}{\sqrt{1+y'^2}}\right)}{\mathrm{d}x}=2.y'.f(x^2+y^2),$$

d'où l'on voit facilement qu'en faisant l'application du théorème VI on aura ici

$$(45)\qquad \varphi=-\frac{1}{\sqrt{1+y'^2}},\quad \text{et}\quad \psi=2.f(x^2+y^2),$$

et partant

$$\frac{d\varphi}{\mathrm{d}x}-\frac{d\psi}{\mathrm{d}\left(\frac{1}{y'}\right)}=0.$$

Ainsi, tout est réduit à trouver une intégrale première de l'équation (44). Pour cela, multiplions la formule (44) par $x+yy'$; d'où résultera

$$\frac{(x+yy')\,\mathrm{d}y'}{\sqrt{(1+y'^2)^3}}=f(x^2+y^2)\,.\,\mathrm{d}(x^2+y^2),$$

et en intégrant

$$(46)\qquad \frac{xy'-y}{\sqrt{1+y'^2}}=f_1(x^2+y^2)+\alpha_1,$$

α_1 étant la constante arbitraire, et

$$f_1(z) = \int f(z) . dz.$$

Or les formules (45) et (46) donnent

$$\frac{d\varphi}{d\alpha_1} = \frac{d\varphi}{dy'} \cdot \frac{dy'}{d\alpha_1} = \frac{y'}{x + yy'}.$$

De là, en vertu du corollaire au théorème VI, il suit que

$$(47) \qquad \int \frac{dy - y'dx}{x + yy'} = \text{const.}$$

sera l'intégrale cherchée de la formule (44).

Pour effectuer l'intégration dans l'équation (47), il ne faut qu'y substituer la valeur de y', tirée de la formule (46), savoir :

$$(48) \qquad y' = \frac{xy \pm f_2 . p}{x^2 - f_2^2},$$

en écrivant f_2 au lieu de

$$f_1(x^2 + y^2) + \alpha_1,$$

et en posant, pour abréger,

$$(49) \qquad p = \sqrt{x^2 + y^2 - f_2^2}.$$

En observant que les formules (48) et (49) donnent

$$x + yy' = \frac{p(px \pm f_2 . y)}{x^2 - f_2^2},$$

nous aurons pour l'intégrale générale

$$\int \frac{(x^2 - f_2^2)\, dy - (xy \pm f_2 . p)\, dx}{p\,(px \pm f_2 . y)} = \text{const.}$$

Multiplions ici le numérateur et le dénominateur par

$$px \mp f_2 . y,$$

nous aurons, en supprimant le facteur $x^2 - f_2^2$,

$$\int \frac{(px \mp f_2 y)\,\mathrm{d}y - (py \pm f_2 x).\mathrm{d}x}{p\,(x^2+y^2)} = \text{const.},$$

ou, ce qui revient au même,

$$2\int \frac{x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x}{x^2+y^2} \pm \int \frac{f_2}{\sqrt{x^2+y^2-f_2^2}} \cdot \frac{\mathrm{d}(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = \text{const.}$$

Donc l'intégrale générale de la formule (44) sera

$$2 \operatorname{arc\,tang} \frac{y}{x} \pm \mathrm{F}\,(x^2+y^2) = \alpha_2,$$

en posant, pour abréger,

$$\int \frac{[f_1(z)+\alpha_1]\,\mathrm{d}z}{z.\sqrt{z-[f_1(z)+\alpha_1]^2}} = \mathrm{F}\,(z),$$

α_1 et α_2 étant deux constantes arbitraires.

§ XII.

EXEMPLE II.

Trouver l'intégrale générale de l'équation différentielle

$$(50) \qquad \frac{yy''}{ry'^2} = \frac{c + (y')^{\frac{1}{r}-1} . \mathfrak{F}(z)}{c + my^{1-r}},$$

où

$$(51) \qquad z = \frac{ax + ny^{1-r}}{c + my^{1-r}},$$

a, c, m, n et r étant des constantes quelconques.

Nous observons en premier lieu que la formule (50), multipliée par

$$\frac{(r-1).(y')^{2-\frac{1}{r}}y^{-r}}{c+my^{1-r}},$$

peut être présentée sous cette forme

$$\frac{\mathrm{d}.\left(\frac{(y')^{1-\frac{1}{r}}}{m+cy^{r-1}}\right)}{\mathrm{d}x}=y'\cdot\frac{(r-1).y^{-r}}{(c+my^{1-r})^2}\cdot\mathfrak{F}(z),$$

d'où, en appliquant le théorème VI, nous aurons

$$(52)\qquad \varphi=\frac{(y')^{1-\frac{1}{r}}}{m+cy^{r-1}}\quad \text{et}\quad \psi=\frac{(r-1)y^{-r}}{(c+my^{1-r})^2}\cdot\mathfrak{F}(z),$$

et partant

$$\frac{d\varphi}{\mathrm{d}x}-\frac{d\psi}{\mathrm{d}\left(\frac{1}{y'}\right)}=0.$$

Par conséquent, il suit du corollaire au théorème VI qu'ayant trouvé une intégrale première de l'équation (50), nous en déduirons l'intégrale générale par de simples quadratures. En effet, différentions la formule (51), d'où nous aurons

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=\frac{a(c+my^{1-r})+(1-r)y^{-r}.y'.(cn-amx)}{(c+my^{1-r})^2}=\mathrm{B},$$

et écrivons la formule (50) de cette manière

$$(y')^{-\frac{1}{r}}.\left[\frac{yy''}{ry'}(c+my^{1-r})-cy'\right]=\mathfrak{F}(z);$$

cette équation, multipliée par

$$\mathrm{B}\,\mathrm{d}x=\mathrm{d}z,$$

donnera

$$(53)\qquad \mathrm{B}.(y')^{-\frac{1}{r}}.\left[\frac{yy''}{ry'}(c+my^{1-r})-cy'\right]\mathrm{d}x=\mathfrak{F}(z)\,\mathrm{d}z.$$

Posons de plus, pour abréger,

$$\mathfrak{P} = \frac{y^{1-r}.y'(cn - amx) + ay(c + my^{1-r})}{(y')^{\frac{1}{r}}.(c + my^{1-r})};$$

en différentiant $\mathfrak{P}$, nous aurons

$$\frac{d\mathfrak{P}}{dx} = B.(y')^{-\frac{1}{r}}\left[cy' - \frac{yy''}{ry'}(c + my^{1-r})\right],$$

d'où, en vertu de l'équation (53), il suit

$$(54) \qquad d\mathfrak{P} = -\mathfrak{F}(z)\,dz.$$

En faisant donc

$$\int \mathfrak{F}(z)\,dz = -F(z),$$

nous aurons par l'intégration de l'équation (54), en restituant la valeur de $\mathfrak{P}$,

$$(55) \qquad \frac{y^{1-r}.y'(cn - amx) + ay(c + my^{1-r})}{(y')^{\frac{1}{r}}.(c + my^{1-r})} = F(z) + \alpha_1,$$

ce qui est l'intégrale première cherchée de l'équation (50).

Cela posé, le corollaire du théorème VI nous donnera pour l'intégrale générale de l'équation (50)

$$\int \frac{1}{y'}\cdot\frac{d\varphi}{d\alpha_1}(dy - y'\,dx) = \alpha_2,$$

c'est-à-dire

$$(56) \qquad u = \int \frac{dy - y'\,dx}{ay^r(c + my^{1-r}) + (1-r).y'(cn - amx)} = \alpha_2,$$

parce qu'en vertu des formules (52) et (55) nous aurons

$$\frac{d\varphi}{d\alpha_1} = \frac{d\varphi}{dy'}\cdot\frac{dy'}{d\alpha_1} = \frac{(1-r).y'}{ay^r(c + my^{1-r}) + (1-r)y'(cn - amx)}.$$

Pour effectuer l'intégration dans l'équation (56), posons

(57) $$\varpi = \log\left[(c + my^{1-r})(cn - amx)\right],$$

d'où nous aurons cette formule

$$\varpi + \alpha_2 = u + \log\left[(c + my^{1-r})(cn - amx)\right],$$

qui différentiée donnera

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}\varpi}{\mathrm{d}x} + \frac{m\left[a(c + my^{1-r}) - (1-r)(cn - amx).y^{-r}.y'\right]}{(c + my^{1-r}).(cn - amx)};$$

ou, ce qui revient au même,

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}\varpi}{\mathrm{d}x} + \frac{m\left[a(c + my^{1-r}) + (1-r)(cn - amx).y^{-r}.y'\right]}{(c + my^{1-r}).(cn - amx)}$$
$$\times \frac{a(c + my^{1-r}) - (1-r)(cn - amx).y^{-r}.y'}{a(c + my^{1-r}) + (1-r)(cn - amx).y^{-r}.y'},$$

c'est-à-dire

(58) $$\mathrm{d}u = \mathrm{d}\varpi - \frac{\mathrm{d}\sigma}{\sigma}\cdot\frac{a - (1-r).\sigma.y^{-r}.y'}{a + (1-r).\sigma.y^{-r}.y'},$$

en posant, pour abréger,

(59) $$\sigma = \frac{cn - amx}{c + my^{1-r}}.$$

Mais l'intégrale première (55) peut être présentée sous cette forme

$$a + y^{-r}.y'.\sigma = (y^{-r}.y')^{\frac{1}{r}}.\left[\mathrm{F}\left(\frac{n-\sigma}{m}\right) + \alpha_1\right],$$

laquelle formule, résolue par rapport à $y^{-r}.y'$, donnera

$$y^{-r}.y' = \varphi(\sigma, \alpha_1),$$

ce qui, substitué dans la formule (58), nous fournira

$$\mathrm{d}u = \mathrm{d}\varpi + \frac{\mathrm{d}\sigma}{\sigma} - 2a.\frac{1}{a + (1-r).\sigma.\varphi(\sigma, \alpha_1)}\cdot\frac{\mathrm{d}\sigma}{\sigma}.$$

En intégrant nous aurons enfin, à l'aide des formules (56) et (57), l'intégrale générale de l'équation (50)

$$\log(cn - amx) - a.\mathrm{F}_1\left(\frac{cn - amx}{c + my^{1-r}}, \alpha_1\right) = \alpha_2,$$

en posant, pour abréger,

$$\mathrm{F}_1(\sigma, \alpha_1) = \int \frac{1}{a + (1 - r).\sigma.\varphi(\sigma, \alpha_1)} \cdot \frac{d\sigma}{\sigma},$$

α_1 et α_2 étant deux constantes arbitraires.

§ XIII.

EXEMPLE III.

Trouver l'intégrale générale de l'équation différentielle

$$(60) \qquad \frac{2yy''}{ry'^2} = 1 + \frac{ax + b + cz}{\sqrt{(ax + b)^2 + 2cz(ax + m) + c^2z^2}},$$

où $z = y^{1-r}$ *et* a, b, c, m *et* r *sont des constantes quelconques.*

Faisons, pour abréger,

$$\mathrm{R} + ax + b - cz = \sqrt{(ax + b)^2 + 2cz(ax + m) + c^2z^2},$$

d'où nous aurons sans difficulté

$$(61) \qquad (\mathrm{R} - 2cz)(\mathrm{R} + 2ax + 2b) = 2c(m - b).z,$$

et en différentiant, après avoir pris les logarithmes,

$$\frac{\frac{d\mathrm{R}}{dx} - 2c(1 - r).y^{-r}.y'}{\mathrm{R} - 2cz} + \frac{\frac{d\mathrm{R}}{dx} + 2a}{\mathrm{R} + 2ax + 2b} = \frac{(1 - r)y'}{y},$$

c'est-à-dire, après quelques réductions,

$$\frac{d\mathrm{R}}{dx} = (1 - r).\frac{y'}{y}.\mathrm{R} - \frac{\mathrm{R} - 2cz}{\mathrm{R} + 2ax + 2b}\left(\frac{d\mathrm{R}}{dx} + 2a\right),$$

ou, ce qui revient au même,

$$(62)\qquad \left(\frac{dR}{dx}+2a\right)\left(1+\frac{R-2cz}{R+2ax+2b}\right)=\frac{2ay+(1-r)y'R}{y}.$$

Or l'équation différentielle (60) peut être écrite de cette manière

$$(63)\qquad \frac{2yy''}{ry'^2}=1+\frac{ax+b+cz}{R+ax+b-cz}=\frac{R+2ax+2b}{R+ax+b-cz},$$

d'où

$$\frac{ry'^2}{yy''}=1+\frac{R-2cz}{R+2ax+2b},$$

ce qui, substitué dans l'équation (62), donnera

$$\frac{y'\left(2a+\frac{dR}{dx}\right)+Ry''}{2ay+Ry'}=\frac{y''}{ry'}.$$

En intégrant, nous aurons

$$(64)\qquad 2ay+Ry'=\alpha_1(y')^{\frac{1}{r}}$$

pour l'intégrale première de l'équation (60), α_1 étant une constante arbitraire.

Écrivons à présent l'équation (63), qui est la même que l'équation (60), sous cette forme

$$-\left(\frac{1}{y'}\right)'=\frac{r}{2y}\cdot\frac{R+2ax+2b}{R+ax+b-cz},$$

et appliquons le théorème V pour en trouver l'intégrale générale. On voit immédiatement qu'on a

$$(65)\qquad \varphi=-\frac{1}{y'}\quad\text{et}\quad \psi=\frac{r}{2y}\cdot\frac{R+2ax+2b}{R+ax+b-cz},$$

d'où il suit

$$\frac{d\varphi}{dy}-\frac{d\psi}{dy'}=0.$$

Cette relation ayant lieu, le corollaire au théorème V nous enseigne qu'après l'élimination de y'

$$\frac{d\varphi}{d\alpha_1}(dy - y'dx)$$

est une différentielle exacte, et que

$$\int \frac{d\varphi}{d\alpha_1}(dy - y'dx) = \alpha_2$$

est l'intégrale générale de l'équation (60), α_2 étant une constante arbitraire. Mais à l'aide des formules (64) et (65) nous aurons

$$\frac{d\varphi}{d\alpha_1} = \frac{d\varphi}{dy'} \cdot \frac{dy'}{d\alpha_1} = -\frac{r.(y')^{\frac{1}{r}-1}}{2ay + (1-r)y'.\mathrm{R}},$$

d'où

$$\frac{d\varphi}{d\alpha_1}(dy - y'dx) = -\frac{r(y')^{\frac{1}{r}-1}(dy - y'dx)}{2ay + (1-r)y'.\mathrm{R}}. \tag{66}$$

En même temps la formule (64), que nous pouvons écrire sous cette forme

$$y'.y^{-r}.y^{r-1}.\mathrm{R} = \alpha_1(y'.y^{-r})^{\frac{1}{r}} - 2a, \tag{67}$$

nous donnera $y'.y^{-r}$ exprimé en $y^{r-1}.\mathrm{R}$, savoir

$$y'.y^{-r} = \varpi(y^{r-1}.\mathrm{R}, \alpha_1) = \varpi, \tag{68}$$

d'où

$$(y')^{\frac{1}{r}} = y.(\varpi)^{\frac{1}{r}}, \tag{69}$$

et partant, à l'aide de la formule (64),

$$y'.\mathrm{R} = y.\left[\alpha_1(\varpi)^{\frac{1}{r}} - 2a\right]. \tag{70}$$

Cela posé, en vertu des formules (66), (69) et (70) que nous venons de trouver, nous aurons l'intégrale générale cherchée (après avoir supprimé le facteur r)

$$\int \frac{\mathrm{d}x - \frac{y^{-r}}{\varpi}\mathrm{d}y}{(1-r)\,\alpha_1 + 2ar.(\varpi)^{-\frac{1}{r}}} = \alpha_2,$$

ou, en vertu des méthodes connues,

$$(71)\quad \mathrm{F}(x, y, \alpha_1) - \int \left\{ \frac{d\mathrm{F}}{\mathrm{d}y} + \frac{y^{-r}}{\varpi.\left((1-r)\,\alpha_1 + 2ar(\varpi)^{-\frac{1}{r}}\right)} \right\} \mathrm{d}y = \alpha_2,$$

α_1 et α_2 étant deux constantes arbitraires, et ayant posé, pour abréger,

$$(72)\qquad \int \frac{\mathrm{d}x}{(1-r)\,\alpha_1 + 2ar(\varpi)^{-\frac{1}{r}}} = \mathrm{F}(x, y, \alpha_1) = \mathrm{F},$$

où l'intégration, se rapportant à la seule variable x, doit être effectuée comme si y était constante.

D'ailleurs il est très-facile de démontrer que l'expression sous le signe d'intégration dans l'équation (71)

$$\frac{d\mathrm{F}}{\mathrm{d}y} + \frac{y^{-r}}{\varpi\left((1-r)\,\alpha_1 + 2ar(\varpi)^{-\frac{1}{r}}\right)} = \mathfrak{Q}$$

est une fonction de la seule variable y. En effet, différentions-la par rapport à x, nous aurons

$$\frac{d\mathfrak{Q}}{\mathrm{d}x} = y^{-r}.\frac{d\left[\frac{1}{(1-r)\,\alpha_1\varpi + 2ar(\varpi)^{1-\frac{1}{r}}}\right]}{\mathrm{d}x} + \frac{d^2\mathrm{F}}{\mathrm{d}x.\mathrm{d}y},$$

c'est-à-dire, en vertu de l'équation (72),

$$(73)\quad \frac{d\mathfrak{Q}}{\mathrm{d}x} = -\frac{(1-r)\cdot\frac{\varpi'}{y}\cdot\frac{d\mathrm{R}}{\mathrm{d}x}\left(\alpha_1 - 2a(\varpi)^{-\frac{1}{r}}\right) - 2ay^{r-1}.(\varpi)^{1-\frac{1}{r}}.\varpi'\left[\frac{d\mathrm{R}}{\mathrm{d}y} + (r-1)\cdot\frac{\mathrm{R}}{y}\right]}{(\varpi)^2\left((1-r)\,\alpha_1 + 2ar(\varpi)^{-\frac{1}{r}}\right)^2}.$$

Mais des équations (69) et (70) on tirera

$$\alpha_1 - 2a(\varpi)^{-\frac{1}{r}} = \frac{y'}{y}\cdot \mathrm{R}.(\varpi)^{-\frac{1}{r}} = (y')^{1-\frac{1}{r}}.\mathrm{R},$$

$$y^{r-1}.(\varpi)^{1-\frac{1}{r}} = (y')^{1-\frac{1}{r}},$$

ce qui, substitué dans l'équation (73), donnera

$$(74)\qquad \frac{d\mathfrak{Q}}{\mathrm{d}x} = -\frac{(y')^{1-\frac{1}{r}}.\varpi'.\left[(1-r).\mathrm{R}.\frac{d\mathrm{R}}{\mathrm{d}x} - 2ay.\frac{d\mathrm{R}}{\mathrm{d}y} + (1-r).2a\mathrm{R}\right]}{y.(\varpi)^2.\left((1-r)\,\alpha_1 + 2ar(\varpi)^{-\frac{1}{r}}\right)^2}.$$

De plus, par la différentiation partielle de l'équation (61) par rapport à x et par rapport à y, nous aurons

$$\frac{d\mathrm{R}}{\mathrm{d}x} = -\frac{a(\mathrm{R}-2cz)}{\mathrm{R}+ax+b-cz},$$

$$2y\cdot\frac{d\mathrm{R}}{\mathrm{d}y} = \frac{(1-r).\mathrm{R}(\mathrm{R}+2ax+2b)}{\mathrm{R}+ax+b-cz},$$

ce qui, substitué dans l'équation (74), en fait évanouir le second membre, de sorte que

$$\frac{d\mathfrak{Q}}{\mathrm{d}x} = 0,$$

ce qui montre que $\mathfrak{Q}$ est tout à fait indépendant de x.

§ XIV.

EXEMPLE IV.

Trouver l'intégrale générale de l'équation différentielle

$$(75)\qquad \frac{y''}{(a+2by'+cy'^2)^{\frac{3}{2}}} = 2.f(z),$$

où, pour abréger,

$$z = ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2ex + 2fy + g. \tag{76}$$

Faisons

$$\left\{\begin{aligned} k^2 &= ac - b^2, \\ \mathrm{F}(z) &= \int f(z).\mathrm{d}z; \end{aligned}\right. \tag{77}$$

et soient m et n tels, que

$$\left\{\begin{aligned} am + bn &= e, \\ bm + cn &= f; \end{aligned}\right. \tag{78}$$

après avoir multiplié l'équation (75) par

$$2[(a + by')x + (b + cy')y + fy' + e]\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}z,$$

nous aurons, en intégrant,

$$\frac{xy' - y + my' - n}{\sqrt{a + 2by' + cy'^2}} = \mathrm{F}(z) + \alpha_1, \tag{79}$$

ce qui est une intégrale première de l'équation (75), α_1 étant une constante arbitraire.

Mais la formule (75) peut aussi être présentée sous cette forme

$$\frac{\mathrm{d}.\left(\dfrac{a + by'}{\sqrt{a + 2by' + cy'^2}}\right)}{\mathrm{d}x} = y'.2k^2.f(z),$$

d'où il suit qu'en appliquant le théorème VI nous aurons

$$\varphi = \frac{a + by'}{\sqrt{a + 2by' + cy'^2}}, \quad \psi = 2.k^2.f(z), \tag{80}$$

et partant

$$\frac{d\varphi}{\mathrm{d}x} - \frac{d\psi}{\mathrm{d}\left(\dfrac{1}{y'}\right)} = 0.$$

En observant qu'en vertu des formules (79) et (80) on a

$$\frac{d\varphi}{d\alpha_1} = \frac{d\varphi}{dy'}\cdot\frac{dy'}{d\alpha_1} = \frac{k^2.y'}{x(a+by')+y(b+cy')+fy'+e},$$

il résultera du corollaire au théorème VI qu'en supprimant le facteur k^2 l'intégrale générale de l'équation (75) sera

$$(81)\qquad \int \frac{dy - y'\,dx}{x(a+by')+y(b+cy')+fy'+e} = \alpha_2,$$

α_2 étant une constante arbitraire.

A présent effectuons l'intégration indiquée. D'abord, attention faite aux relations (78), nous aurons

$$d.\operatorname{arc\,tang}\frac{bx+cy+f}{k(x+m)} = \frac{k[(x+m)\,dy-(y+n)\,dx]}{ax^2+2bxy+cy^2+2fy+2ex+fn+em},$$

d'où, en intégrant,

$$\operatorname{arc\,tang}\frac{bx+cy+f}{k(x+m)} = k.\int\frac{(x+m)\,dy-(y+n)\,dx}{ax^2+2bxy+cy^2+2fy+2ex+fn+em},$$

laquelle équation, ajoutée à l'équation (81) multipliée par k, donnera

$$\operatorname{arc\,tang}\frac{bx+cy+f}{k(x+m)} + k.\int\Bigg[\frac{dy-y'\,dx}{x(a+by')+y(b+cy')+fy'+e} \\ - \frac{(x+m)\,dy-(y+n)\,dx}{ax^2+2bxy+cy^2+2fy+2ex+fn+em}\Bigg] = \alpha_2.$$

Réduisons ici les deux fractions sous le signe d'intégration à un même dénominateur. En posant, pour abréger,

$$(82)\qquad B = \frac{x(a+by')+y(b+cy')+fy'+e}{k(xy'-y+my'-n)},$$

nous aurons, attention faite à la formule (76),

$$(83)\qquad \operatorname{arc\,tang}\frac{bx+cy+f}{k(x+m)} - \frac{1}{2}.\int\frac{dz}{z-g+fn+em}\cdot\frac{1}{B} = \alpha_2.$$

D'ailleurs la formule (82) donnera, à l'aide des relations (78),

$$\mathrm{B}^2 + 1 = \frac{z - g + fn + em}{k^2\left(\dfrac{xy - y + my' - n}{\sqrt{a + 2by' + cy'^2}}\right)^2},$$

c'est-à-dire, en vertu de la formule (79),

$$\mathrm{B}^2 + 1 = \frac{z - g + fn + em}{k^2[\mathrm{F}(z) + \alpha_1]^2},$$

d'où enfin il résultera

$$\frac{1}{\mathrm{B}} = \pm \frac{k[\mathrm{F}(z) + \alpha_1]}{\sqrt{z - g + fn + em - k^2.[\mathrm{F}(z) + \alpha_1]^2}}.$$

Cette valeur de $\frac{1}{\mathrm{B}}$ étant substituée dans la formule (83), et ayant posé, pour abréger,

$$\mathrm{F}_1(z, \alpha_1) = \int \frac{dz}{z - g + fn + em} \cdot \frac{\mathrm{F}(z) + \alpha_1}{\sqrt{z - g + fn + em - k^2[\mathrm{F}(z) + \alpha_1]^2}},$$

nous aurons pour l'intégrale générale de la formule (75)

$$\operatorname{arc\,tang} \frac{bx + cy + f}{k(x + m)} \pm \frac{k}{2} \cdot \mathrm{F}_1(ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2fy + 2ex + g, \alpha_1) = \alpha_2,$$

α_1 et a_2 étant deux constantes arbitraires, et les valeurs de k et de m étant données par les formules (77) et (78). Si k devient imaginaire, les réductions nécessaires se feront sans aucune difficulté.

§ XV.

Dans un Mémoire de M. Liouville : « Remarques sur une classe d'équations différentielles » (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, t. XIV, p. 225), l'illustre auteur a réussi, par des substitutions très-ingénieuses, à faire voir une propriété, auparavant inconnue, de l'équation du troisième ordre

$$\frac{\mathrm{d}.\varphi(z).\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}x^2}}{\mathrm{d}x} = f(z).\mathrm{F}\left(\varphi(z).\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}x^2}\right),$$

savoir, *que l'intégrale complète est toujours facile à obtenir par quadratures dès qu'on donne une intégrale première*. Or, et cette équation et celle plus générale dont l'auteur fait mention dans la fin de son Mémoire, ne sont que des cas spéciaux d'un groupe très-étendu d'équations différentielles du troisième ordre, qui jouissent toutes de la même propriété remarquable.

Quant aux équations différentielles du second ordre, qui manquent de la variable indépendante, il est connu depuis longtemps que leur intégration ne présente pas plus de difficulté que celle d'une équation du premier ordre. Nous ferons voir ici qu'il y a encore une grande classe de pareilles équations du troisième ordre(où il manque la variable indépendante) qui se distinguent par la propriété analogue, que leurs intégrales complètes sont toujours faciles à obtenir par quadratures, dès qu'on a trouvé une seule intégrale première.

En effet, considérons dans les théorèmes V et VI la variable x comme fonction de t, et faisons

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2},$$

d'où il suit

$$\sqrt{2y} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t};$$

donc, les substitutions étant effectuées, en mettant x au lieu de t, et y, y', y'' au lieu de x, x'_t, x''_t $\Big(y'$ et y'' désignant comme à l'ordinaire $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ et $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\Big)$, on obtiendra ces deux théorèmes remarquables :

THÉORÈME VII. — *Soient φ et ψ deux fonctions quelconques de y, y', y'', et soit*

(84) $$\frac{\mathrm{d}\varphi(y, y', y'')}{\mathrm{d}x} = \psi(y, y', y'')$$

une équation différentielle du troisième ordre, dont on a trouvé l'intégrale première

$$w_1(y, y', y'') = \alpha_1$$

(α_1 *étant la constante arbitraire); alors, après l'élimination de* y'', *l'expression*

$$\mathfrak{M}.\frac{d\varphi}{d\alpha_1}(y'\,dy' - y''\,dy)$$

deviendra une différentielle exacte, et l'intégrale seconde de l'équation (84)

$$\int \mathfrak{M}.\frac{d\varphi}{d\alpha_1}(y'\,dy' - y''\,dy) = \text{const.} \tag{85}$$

se réduira à des quadratures, pourvu que $\mathfrak{M}$ *soit une solution quelconque de*

$$\frac{d\varphi}{dy''}.\frac{d\log\mathfrak{M}}{dx} - \frac{d\varphi}{dy'} + \frac{d\psi}{dy''} = 0,$$

ou, ce qui revient au même, que

$$\mathfrak{M} = e^{\int dx\left(\frac{d\varphi}{dy'} - \frac{d\psi}{dy''}\right) : \frac{d\varphi}{dy''}}.$$

Corollaire. — *Dans le cas de*

$$\frac{d\varphi}{dy'} = \frac{d\psi}{dy''},$$

ce qui a toujours lieu si φ *n'est fonction que de* y *et* y'', *et qu'en même temps* ψ *ne soit fonction que de* y *et* y', *l'expression*

$$\frac{d\varphi}{d\alpha_1}(y'\,dy' - y''\,dy)$$

deviendra toujours, après l'élimination de y'', *une différentielle exacte, et l'intégrale seconde de la formule* (84)

$$\int \frac{d\varphi}{d\alpha_1}(y'\,dy' - y''\,dy) = \text{const.}$$

pourra toujours s'effectuer par quadratures.

Pour avoir l'intégrale complète, il suffit d'observer qu'on aura par l'équation (85)

$$\mathrm{F}(y, y', \alpha_1) = \alpha_2,$$

ce qui donnera

$$y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f_1(y, \alpha_1, \alpha_2),$$

d'où l'on aura enfin l'intégrale complète

$$x + \alpha_3 = \int \frac{\mathrm{d}y}{f_1(y, \alpha_1, \alpha_2)},$$

α_1, α_2 et α_3 étant trois constantes arbitraires.

Théorème VIII. — *Soient φ et ψ deux fonctions quelconques de y, y'* et *y'', et soit*

$$(86) \qquad \frac{\mathrm{d}\cdot\varphi(y, y', y'')}{\mathrm{d}x} = y''\cdot\psi(y, y', y'')$$

une équation différentielle du troisième ordre dont on a trouvé l'intégrale première

$$w_1(y, y', y'') = \alpha_1$$

(α_1 étant une constante arbitraire); alors, après l'élimination de y'', l'expression

$$\frac{\mathfrak{M}}{y''}\cdot\frac{d\varphi}{\mathrm{d}\alpha_1}(y'\mathrm{d}y' - y''\,dy)$$

deviendra une différentielle exacte, et l'intégrale seconde de (86)

$$(87) \qquad \int \frac{\mathfrak{M}}{y''}\cdot\frac{d\varphi}{\mathrm{d}\alpha_1}(y'\mathrm{d}y' - y''\mathrm{d}y) = \text{const.}$$

se réduira à des quadratures, pourvu que $\mathfrak{M}$ soit une solution quelconque de

$$\frac{d\varphi}{\mathrm{d}\left(\frac{1}{y''}\right)}\cdot\frac{\mathrm{d}\log\mathfrak{M}}{\mathrm{d}y'} - y'\cdot\frac{d\varphi}{\mathrm{d}y} + \frac{d\psi}{\mathrm{d}\left(\frac{1}{y''}\right)} = 0,$$

ou, ce qui revient au même, que

$$(88) \qquad \mathfrak{M} = e^{\int \mathrm{d}y' \left[y' \cdot \frac{d\varphi}{\mathrm{d}y} - \frac{d\psi}{\mathrm{d}\left(\frac{1}{y''}\right)} \right] : \frac{d\varphi}{\mathrm{d}\left(\frac{1}{y''}\right)}}.$$

Corollaire. — *Dans le cas de*

$$y' \cdot \frac{d\varphi}{\mathrm{d}y} - \frac{d\psi}{\mathrm{d}\left(\frac{1}{y''}\right)} = 0,$$

ce qui a toujours lieu si φ n'est fonction que de y' et y'', et qu'en même temps ψ ne soit fonction que de y et y', l'expression

$$\frac{1}{y''} \cdot \frac{d\varphi}{\mathrm{d}\alpha_1} (y' \mathrm{d}y' - y'' \mathrm{d}y)$$

deviendra toujours, après l'élimination de y'', une différentielle exacte, et l'intégrale seconde de l'équation (86)

$$\int \frac{1}{y''} \cdot \frac{d\varphi}{\mathrm{d}\alpha_1} (y' \mathrm{d}y' - y'' \mathrm{d}y) = \text{const.}$$

pourra toujours s'effectuer par quadratures.

Pour avoir l'intégrale complète de la proposée, il suffit d'observer qu'on aura par l'équation (87)

$$\mathrm{F}(y, y', \alpha_1) = \alpha_2,$$

d'où l'on conclura sans difficulté

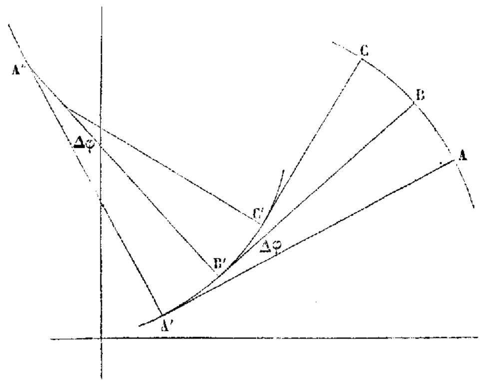
$$x + \alpha_3 = \int \frac{\mathrm{d}y}{f_1(y, \alpha_1, \alpha_2)},$$

α_1, α_2 et α_3 étant trois constantes arbitraires.

§ XVI.

Appliquons à présent le théorème VIII à la solution du problème suivant :

Trouver une courbe telle, que pour chacun de ses points le produit de l'ordonnée et de la sous-tangente, multiplié par le rayon de courbure de la développée, soit une fonction quelconque de la normale.



Solution. — Soient ABC la courbe cherchée, A′B′C′ sa développée,

$$AA' = \rho = \frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}$$

le rayon de courbure de la courbe ABC,

$$(89) \qquad A'A'' = \rho_1 = \lim \frac{A'B'}{\Delta\varphi} = \frac{d\rho}{d\varphi}$$

le rayon de courbure de la développée A′B′C′,

$$(90) \qquad \nu = y\sqrt{1+y'^2}$$

la normale de la courbe ABC; le problème conduit à cette équation

$$(91) \qquad \frac{y^2}{y'} \cdot \rho_1 = f(\nu),$$

ou, ce qui revient au même,

$$\frac{\rho_1}{\rho} = \frac{y'}{\rho \cdot y^2} \cdot f(\nu).$$

Or, en vertu de l'équation (89) on a

$$\frac{\rho_1}{\rho} = \frac{d\rho}{\rho\, d\varphi} = \frac{d\rho}{ds} = 3y' - \frac{y'''}{(y'')^2}\cdot(1+y'^2) = \frac{d\left(y + \frac{1+y'^2}{y''}\right)}{dx},$$

ce qui donnera

$$\frac{d\left(y + \frac{1+y'^2}{y''}\right)}{dx} = \frac{y'}{\rho y^2}\cdot f(v) = y''\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}\cdot\frac{f(v)}{v^2},$$

ou, ce qui revient au même,

$$\text{(92)} \qquad \frac{d\left(y + \frac{1+y'^2}{y''}\right)}{dx} = y''\cdot yy'\cdot\frac{f(v)}{v^3}.$$

En multipliant cette formule par

$$y + \frac{1+y'^2}{y''} = \frac{v\, dv}{yy'y''.\, dx},$$

ce qu'on obtiendra sans difficulté de l'équation (90), on aura

$$\left(y + \frac{1+y'^2}{y''}\right) d.\left(y + \frac{1+y'^2}{y''}\right) = \frac{f(v)}{v^2}\, dv,$$

d'où, en posant, pour abréger,

$$\int \frac{f(v)}{v^2}\, dv = \frac{1}{2}\,F(v),$$

on aura par l'intégration

$$\text{(93)} \qquad y + \frac{1+y'^2}{y''} = \sqrt{F(v) + \alpha_1}.$$

Or, après avoir trouvé une intégrale première de l'équation (91), la forme de l'équation (92) nous porte à en chercher l'intégrale complète à l'aide du théorème VIII. Pour cela, nous observons en premier lieu qu'on a ici

$$\varphi(y, y', y'') = y + \frac{1+y'^2}{y''} = \sqrt{F(\rho) + \alpha_1},$$

$$\psi(y, y', y'') = \frac{yy'.f(\rho)}{\rho^3},$$

d'où il résulte

$$\frac{d\varphi}{d\alpha_1} = \frac{1}{2\sqrt{F(\rho)+\alpha_1}},$$

$$\frac{d\varphi}{dy} = 1, \quad \frac{d\varphi}{d\left(\frac{1}{y''}\right)} = 1 + y'^2, \quad \frac{d\psi}{d\left(\frac{1}{y''}\right)} = 0.$$

De plus, la formule (88) donne

$$\mathfrak{M} = \sqrt{1+y'^2};$$

donc, en vertu du théorème VIII, nous aurons l'intégrale seconde de l'équation (91)

$$(94) \qquad \int \frac{\sqrt{1+y'^2}}{y''\sqrt{F(\rho)+\alpha_1}}(y'\,dy' - y''\,dy) = \alpha_2,$$

où l'intégration pourra facilement s'effectuer par quadratures. En effet, à l'aide de l'équation (93) nous aurons par l'équation (94)

$$\alpha_2 = \int \frac{\sqrt{F(\rho)+\alpha_1} - y}{\sqrt{F(\rho)+\alpha_1}}\left[\frac{y'\,dy'}{\sqrt{1+y'^2}} - \frac{\sqrt{1+y'^2}.dy}{\sqrt{F(\rho)+\alpha_1} - y}\right],$$

c'est-à-dire

$$\alpha_2 = \sqrt{1+y'^2} - \int \frac{1}{\sqrt{F(\rho)+\alpha_1}} \cdot \left(\frac{yy'\,dy'}{\sqrt{1+y'^2}} + \sqrt{1+y'^2}\,dy\right),$$

et, en vertu de l'équation (90),

$$\alpha_2 = \frac{\rho}{y} - \int \frac{d\rho}{\sqrt{F(\rho)+\alpha_1}},$$

moyennant quoi, en posant, pour abréger,

$$\int \frac{dv}{\sqrt{F(v)+\alpha_1}} = \mathfrak{F}_1(v, \alpha_1),$$

l'intégrale seconde de l'équation (91) prendra la forme

$$\frac{v}{y} = \mathfrak{F}_1(v, \alpha_1) + \alpha_2.$$

Cette équation, étant résolue par rapport à v, nous donnera

$$v = \varpi(y, \alpha_1, \alpha_2) = \varpi,$$

d'où il vient

$$\sqrt{1+y'^2} = \frac{\varpi}{y},$$

ou

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{\varpi^2 - y^2}}{y},$$

ce qui donnera enfin pour l'intégrale complète de l'équation (91)

$$x + \alpha_3 = \int \frac{y\,dy}{\sqrt{[\varpi(y, \alpha_1, \alpha_2)]^2 - y^2}},$$

α_1, α_2 et α_3 étant trois constantes arbitraires.

§ XVII.

Soit

$$\varphi(x, y, y') = 0$$

une équation différentielle du premier ordre; elle peut toujours être considérée comme un cas spécial de

$$\varphi(x, y, y') = \alpha$$

(pour $\alpha = 0$), qui différentiée donnera

$$\frac{d\varphi}{dx} = 0.$$

Or, à cause de

$$\frac{d\varphi}{d\alpha} = 1,$$

les théorèmes V et VI nous enseignent que les expressions

$$\mathfrak{M}(dy - y'\,dx)$$

et

$$\frac{\mathfrak{M}_1}{y'}(dy - y'\,dx)$$

sont des différentielles exactes, pourvu que

$$\mathfrak{M} = e^{\int dx\left(\frac{d\varphi}{dy} : \frac{d\varphi}{dy'}\right)},$$

$$\mathfrak{M} = e^{\int dy.\left[\frac{d\varphi}{dx} : \frac{d\varphi}{d\left(\frac{1}{y'}\right)}\right]}.$$

Nous aurons donc ces deux théorèmes concernant l'intégration des équations du premier ordre :

Théorème IX. — *Soit*

$$\varphi(x, y, y') = 0 \tag{95}$$

une équation différentielle du premier ordre, et soit $\mathfrak{M}$ *une fonction de* x, y *et* y' *telle que*

$$\mathfrak{M} = e^{\int dx\left(\frac{d\varphi}{dy} : \frac{d\varphi}{dy'}\right)}; \tag{96}$$

alors l'expression

$$\mathfrak{M}(dy - y'\,dx) \tag{97}$$

sera une différentielle exacte, et l'élimination de y' *entre l'équation* (95) *et*

$$\int \mathfrak{M}(dy - y'\,dx) = \text{const.}$$

donnera l'intégrale générale de l'équation (95).

THÉORÈME X. — *Soit*

$$\varphi(x, y, y') = 0 \tag{98}$$

une équation différentielle du premier ordre, et soit $\mathfrak{M}_1$ *une fonction de* x, y *et* y' *telle que*

$$\mathfrak{M}_1 = e^{\int \mathrm{d}y \left[\frac{d\varphi}{\mathrm{d}x} : \frac{d\varphi}{\mathrm{d}\left(\frac{1}{y'}\right)}\right]}; \tag{99}$$

alors

$$\frac{\mathfrak{M}_1}{y'}(\mathrm{d}y - y'\,\mathrm{d}x) \tag{100}$$

sera une différentielle exacte, et l'élimination de y' *entre l'équation* (98) *et*

$$\int \frac{\mathfrak{M}_1}{y'}(\mathrm{d}y - y'\,\mathrm{d}x) = \text{const.}$$

donnera l'intégrale générale de l'équation (98).

§ XVIII.

On peut très-facilement vérifier ces deux théorèmes. En effet, $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{M}_1$ étant des fonctions de x, y et y', pour que les expressions (97) et (100) soient des différentielles exactes, il faut et il suffit que

$$\frac{d\mathfrak{M}}{\mathrm{d}x} + \frac{d\mathfrak{M}}{\mathrm{d}y'}\cdot\frac{dy'}{\mathrm{d}x} + y'\left(\frac{d\mathfrak{M}}{\mathrm{d}y} + \frac{d\mathfrak{M}}{\mathrm{d}y'}\cdot\frac{dy'}{\mathrm{d}y}\right) + \mathfrak{M}\cdot\frac{dy'}{\mathrm{d}y} = 0 \tag{101}$$

et

$$\frac{1}{y'}\left(\frac{d\mathfrak{M}}{\mathrm{d}x} + \frac{d\mathfrak{M}}{\mathrm{d}y'}\cdot\frac{dy'}{\mathrm{d}x}\right) + \mathfrak{M}\cdot\frac{d\left(\frac{1}{y'}\right)}{\mathrm{d}x} + \frac{d\mathfrak{M}}{\mathrm{d}y} + \frac{d\mathfrak{M}}{\mathrm{d}y'}\cdot\frac{dy'}{\mathrm{d}y} = 0. \tag{102}$$

Or, en observant que

$$y'' = \frac{dy'}{\mathrm{d}x} + y'\cdot\frac{dy'}{\mathrm{d}y}$$

et

$$\frac{d\,\mathfrak{M}}{\mathrm{d}x} + \frac{d\,\mathfrak{M}}{\mathrm{d}y}\,y' + \frac{d\,\mathfrak{M}}{\mathrm{d}y'}\cdot y'' = \frac{\mathrm{d}\,\mathfrak{M}}{\mathrm{d}x},$$

les formules (101) et (102) peuvent être présentées sous la forme

$$\frac{\mathrm{d}\log\mathfrak{M}}{\mathrm{d}x} + \frac{dy'}{\mathrm{d}y} = 0,$$

$$\frac{\mathrm{d}\log\mathfrak{M}}{\mathrm{d}y} + \frac{\mathrm{d}\left(\frac{1}{y'}\right)}{\mathrm{d}x} = 0;$$

d'où, en remarquant que l'équation

$$\varphi(x, y, y') = 0$$

donnera

$$\frac{d\varphi}{\mathrm{d}y} + \frac{d\varphi}{\mathrm{d}y'}\cdot\frac{dy'}{\mathrm{d}y} = 0,$$

$$\frac{d\varphi}{\mathrm{d}x} + \frac{d\varphi}{\mathrm{d}\left(\frac{1}{y'}\right)}\cdot\frac{d\left(\frac{1}{y'}\right)}{\mathrm{d}x} = 0,$$

nous aurons

$$\log\mathfrak{M} = \int \mathrm{d}x\left(\frac{d\varphi}{\mathrm{d}y} : \frac{d\varphi}{\mathrm{d}y'}\right),$$

$$\log\mathfrak{M}_1 = \int \mathrm{d}y\left[\frac{d\varphi}{\mathrm{d}x} : \frac{d\varphi}{\mathrm{d}\left(\frac{1}{y'}\right)}\right],$$

ce qui revient au même que les formules (96) et (99).

§ XIX.

A présent nous allons appliquer ces deux théorèmes à l'intégration de diverses classes d'équations différentielles du premier ordre, qui me semblent mériter leur place à côté de celles qui ont déjà été l'objet des recherches des analystes.

EXEMPLE I.

Problème. — *Trouver la courbe qui divise la portion de la normale située entre les axes des coordonnées* [*] *en deux parties telles, que l'une soit fonction quelconque de l'autre.*

On verra sans difficulté que la condition donnée conduit à cette équation

$$(103) \qquad \frac{x}{y'}\sqrt{1+(y')^2} = f\left(y\sqrt{1+(y')^2}\right),$$

ou, ce qui revient au même,

$$(104) \qquad y \cdot y' . \varpi(u) - x = 0,$$

en posant, pour abréger,

$$u = y . \sqrt{1+(y')^2} \quad \text{et} \quad f(z) = z . \varpi(z).$$

Pour trouver, à l'aide du théorème X, le facteur propre à l'intégration, nous observons que

$$(105) \qquad \varphi = yy' . \varpi(u) - x.$$

En différentiant (104) nous aurons

$$\frac{\varpi'(u) . yy'^2}{\sqrt{1+(y')^2}} = \frac{1}{yy'} \cdot \frac{dx}{d . \log(x+yy')} - \frac{x}{yy'},$$

d'où, en ajoutant

$$\varpi(u) = \frac{x}{yy'},$$

il suit

$$(106) \qquad \varpi(u) + \varpi'(u) . \frac{yy'^2}{\sqrt{1+(y')^2}} = \frac{1}{yy'} \cdot \frac{dx}{d . \log(x+yy')}.$$

---

[*] Nous supposons toujours les coordonnées rectangulaires.

Or la formule (105) différentiée partiellement donne

$$\frac{d\varphi}{dx} = -1,$$

et de plus, à l'aide de l'équation (106),

$$\frac{d\varphi}{d\left(\frac{1}{y'}\right)} = -y'^2 \cdot \frac{d\varphi}{dy'} = -\frac{dy}{d\log(x+yy')},$$

d'où l'on aura

$$\frac{d\varphi}{dx} : \frac{d\varphi}{d\left(\frac{1}{y'}\right)} = \frac{d\log(x+yy')}{dy},$$

et partant, en vertu de l'équation (99),

$$\mathfrak{M}_1 = x + yy',$$

ce qui donnera l'intégrale générale de l'équation (103)

$$\int \frac{x+yy'}{y'}(dy - y'\,dx) = \text{const}.$$

Mais on trouvera sans difficulté

$$\int \frac{x+yy'}{y'}(dy - y'\,dx) = \frac{y^2 - x^2}{2} - xyy' + \int x\,d(x+yy'),$$

c'est-à-dire

$$\int \frac{x+yy'}{y'}(dy - y'\,dx) = \frac{y^2 - x^2}{2} - xyy' + \int \frac{x}{y'}\sqrt{1+y'^2}.du.$$

à cause de

$$y'.d(x+yy') = \sqrt{1+y'^2}.du.$$

En posant donc

(107) $$\int f(u)\,du = F(u),$$

on aura enfin, à l'aide de l'équation (103),

$$(108)\qquad \frac{y^2-x^2}{2} - xyy' + \mathrm{F}\left(y.\sqrt{1+y'^2}\right) = \text{const.}$$

En éliminant y' entre cette formule et l'équation (103), on obtiendra l'intégrale générale de celle-ci.

§ XX.

EXEMPLE II.

Problème. — *Trouver une courbe telle, que pour chacun de ses points la perpendiculaire abaissée de l'origine sur la tangente soit égale à une fonction quelconque de la normale.*

La condition donnée conduira immédiatement à cette équation différentielle

$$\frac{xy'-y}{\sqrt{1+y'^2}} = f\left(y\sqrt{1+y'^2}\right),$$

dont nous allons chercher l'intégrale générale. En effet, en supposant

$$f(z) = \frac{\varpi(z)}{z},$$

et comme ci-devant

$$u = y\sqrt{1+y'^2},$$

l'équation (107) pourra être présentée sous cette forme

$$(109)\qquad \varpi(u) - y(xy'-y) = 0.$$

Pour avoir, à l'aide du théorème X, le facteur d'intégration, nous observons que

$$(109\ bis)\qquad \varphi = \varpi(u) - y(xy'-y).$$

En différentiant l'équation (109), nous aurons

$$(110)\qquad \frac{\varpi'(u).y'}{\sqrt{1+y'^2}} = \frac{xy'^2+xyy''-yy'}{1+y'^2+yy''}.$$

La formule (109 *bis*), différentiée partiellement, donnera

$$\frac{d\varphi}{dx} = -yy',$$

$$\frac{d\varphi}{d\left(\frac{1}{y'}\right)} = -y'^2 \cdot \frac{d\varphi}{dy'} = y'^2\left[xy - \frac{\varpi'(u).yy'}{\sqrt{1+y'^2}}\right],$$

ou, à l'aide de la formule (110),

$$\frac{d\varphi}{d\left(\frac{1}{y'}\right)} = yy' \cdot \frac{dy}{d\log(x+yy')},$$

d'où il suit

$$\frac{d\varphi}{dx} : \frac{d\varphi}{d\left(\frac{1}{y'}\right)} = -\frac{d\log(x+yy')}{dy}.$$

On aura donc le facteur d'intégration

$$\mathfrak{M}_1 = \frac{1}{x+yy'},$$

et l'intégrale cherchée

$$\int \frac{dy - y'\,dx}{y'(x+yy')} = \text{const.}$$

ou, ce qui revient au même,

$$\int \frac{y\,dy}{yy'(x+yy')} - \int \frac{dx}{x+yy'} = \text{const.}$$

Pour effectuer l'intégration indiquée, nous observons que

$$\int \frac{dx}{x+yy'} = \log(x+yy') - \int \frac{d(yy')}{x+yy'},$$

d'où il résulte

$$(111)\quad \left\{\begin{aligned} \text{const.} &= -\log(x+yy') + \frac{1}{2}\cdot\int \frac{d[y^2(1+y'^2)]}{yy'(x+yy')} \\ &= -\log(x+yy') + \int \frac{y.\sqrt{1+y'^2}.\,d(y.\sqrt{1+y'^2})}{yy'(x+yy')}. \end{aligned}\right.$$

Or nous aurons en général

$$yy'(x+yy') = u\left[u + \frac{xy'-y}{\sqrt{1+y'^2}}\right],$$

et partant

$$yy'(x+yy') = u[u+f(u)],$$

ce qui, substitué dans l'équation (111), donnera

$$(112) \qquad \mathrm{F}\left(y\sqrt{1+y'^2}\right) - \log(x+yy') = \text{const.},$$

en posant, pour abréger,

$$\int \frac{du}{u+f(u)} = \mathrm{F}(u).$$

L'élimination de y' entre la formule (112) et l'équation proposée donnera l'intégrale générale de celle-ci.

§ XXI.

EXEMPLE III.

Problème. — *Trouver la courbe où, pour chacun de ses points, la perpendiculaire abaissée de l'origine sur la normale divise la portion de la normale entre la courbe et l'axe des ordonnées en deux parties telles, que l'une soit toujours une fonction quelconque de l'autre.*

Posons, pour abréger,

$$u = \frac{x}{y'}\cdot\sqrt{1+y'^2}, \quad v = \frac{xy'-y}{\sqrt{1+y'^2}}, \quad w = \frac{\dfrac{x}{y'}+y}{\sqrt{1+y'^2}},$$

d'où il suit

$$(113) \qquad u = v + w;$$

la condition donnée conduit immédiatement à cette équation

$$(114)\qquad v = f(w),$$

laquelle, en posant

$$f(w) = \frac{\varpi(w)}{w} - w,$$

pourra, à l'aide de la formule (113), être présentée sous la forme

$$(115)\qquad u = \frac{\varpi(w)}{w},$$

ou, ce qui revient au même,

$$(116)\qquad \varpi(w) - \frac{x}{y'}\left(\frac{x}{y'} + y\right) = 0.$$

Pour en trouver le facteur d'intégration, soit l'équation (115) résolue par rapport à w, ce qui nous donnera

$$w = \varpi_1(u),$$

d'où l'on aura

$$\varpi(w) = \varpi_2(u).$$

Cela étant ainsi, on pourra écrire l'équation (116) de cette manière

$$(117)\qquad \varpi_2(u) - \frac{x}{y'}\left(\frac{x}{y'} + y\right) = 0;$$

la variable y ne se trouvant point dans u, le théorème IX nous donnera bien facilement le facteur propre à l'intégration. En effet, en observant que

$$\varphi = \varpi_2(u) - \frac{x}{y'}\left(\frac{x}{y'} + y\right),$$

nous aurons

$$\frac{d\varphi}{dy} = -\frac{x}{y'}$$

et

$$(118) \qquad \frac{d\varphi}{dy'} = \frac{1}{y'^2}\left[\frac{2x^2}{y'} + xy - \frac{x.\varpi'_2(u)}{\sqrt{1+y'^2}}\right].$$

De plus l'équation (117) différentiée nous a offert

$$\frac{x\ \varpi'_2(u)}{\sqrt{1+y'^2}} = \frac{2x^2}{y'} + xy - xy'\cdot\frac{dx}{d\log\left(\frac{x}{y'}+y\right)};$$

ce qui, substitué dans l'équation (118), nous donnera immédiatement

$$\frac{d\varphi}{dy'} = \frac{x}{y'}\,\frac{dx}{d\log\left(\frac{x}{y'}+y\right)},$$

d'où, en vertu de l'équation (96), nous aurons

$$\mathfrak{M} = \frac{1}{\frac{x}{y'}+y}.$$

L'intégrale complète de l'équation (114) deviendra donc

$$\text{const.} = \int\frac{dy - y'dx}{\frac{x}{y'}+y} = \int\frac{dy}{\frac{x}{y'}+y} - \int\frac{y'dx}{\frac{x}{y'}+y},$$

ou, à cause de

$$\int\frac{dy}{\frac{x}{y'}+y} = \log\left(\frac{x}{y'}+y\right) - \int\frac{d\left(\frac{x}{y'}\right)}{\frac{x}{y'}+y},$$

encore

$$(119) \qquad \log\left(\frac{x}{y'}+y\right) - \int\frac{d\left(\frac{x}{y'}\right)+y'dx}{\frac{x}{y'}+y} = \text{const.}$$

Or, en observant que

$$d\left(\frac{x}{y'}\right) + y'dx = \sqrt{1+y'^2}\,.\,du,$$

on aura, à l'aide de l'équation (113),

$$\frac{d\left(\frac{x}{y'}\right) + y'\,dx}{\frac{x}{y'} + y} = \frac{dw}{w} + \frac{dv}{w},$$

ou, en vertu de l'équation (114),

$$\frac{d\left(\frac{x}{y'}\right) + y'\,dx}{\frac{x}{y'} + y} = \frac{dw}{w} + \frac{f'(w).dw}{w},$$

ce qui, substitué dans l'équation (119), donnera

$$\log\left(\frac{x}{y'} + y\right) - \log w - \mathrm{F}(w) = \text{const.},$$

ou, ce qui revient au même,

(120) $$\frac{1}{2}\log(1 + y'^2) - \mathrm{F}\left(\frac{\frac{x}{y'} + y}{\sqrt{1 + y'^2}}\right) = \text{const.},$$

en posant

$$\int \frac{f'(w).dw}{w} = \mathrm{F}(w).$$

Enfin, en éliminant y' entre les équations (114) et (120) nous aurons l'intégrale générale de l'équation (114).

§ XXII.

EXEMPLE IV.

PROBLÈME. — *Trouver une courbe telle, que la troisième proportionnelle à l'abscisse et à l'ordonnée soit toujours égale à une fonction quelconque de la sous-normale.*

La condition donnée conduit immédiatement à cette équation

(121) $$y^2 = x.\varpi(yy'),$$

ou, ce qui revient au même, à celle-ci

$$(122) \qquad y^2 . f(yy') - x = 0,$$

si l'on pose

$$\varpi(z) . f(z) = 1.$$

Pour en trouver le facteur d'intégration, on verra sans difficulté que le théorème X est le plus convenable ; en effet, on a

$$\varphi = y^2 . f(yy') - x,$$

d'où il suit

$$\frac{d\varphi}{dx} = -1$$

et

$$\frac{d\varphi}{d\left(\frac{1}{y'}\right)} = -y'^2 . \frac{d\varphi}{dy'} = -y'^2 . y^3 . f'.$$

En différentiant (122) on obtiendra

$$y'^2 . y^3 . f' = \frac{(y - 2xy') . y'^2}{y'^2 + yy''} = -y'\left(\frac{y}{y'} - 2x\right) . \frac{dx}{d\left(\frac{y}{y'} - 2x\right)}$$

$$= -\frac{dy}{d \log\left(\frac{y}{y'} - 2x\right)},$$

ce qui donnera

$$\frac{d\varphi}{d\left(\frac{1}{y'}\right)} = \frac{dy}{d \log\left(\frac{y}{y'} - 2x\right)}.$$

En vertu de l'équation (99), on aura donc le facteur d'intégration

$$\mathfrak{M}_1 = \frac{1}{\frac{y}{y'} - 2x};$$

et l'intégrale générale de l'équation (121)

$$\text{const.} = \int \frac{1}{y'} \frac{dy - y'dx}{\frac{y}{y'} - 2x} = \int \frac{dy}{y'\left(\frac{y}{y'} - 2x\right)} - \int \frac{dx}{\frac{y}{y'} - 2x}.$$

Or, en ayant

$$-\int \frac{dx}{\frac{y}{y'} - 2x} = \frac{1}{2} \log\left(\frac{y}{y'} - 2x\right) - \frac{1}{2} \cdot \int \frac{\frac{dy}{y'} - \frac{y\,dy'}{y'^2}}{\frac{y}{y'} - 2x},$$

on trouve sans difficulté

$$\log\left(\frac{y}{y'} - 2x\right) + \int \frac{d\,(yy')}{y'^2\left(\frac{y}{y'} - 2x\right)} = \text{const.}$$

et enfin

$$(123) \qquad \log\left(\frac{y}{y'} - 2x\right) + F(yy') = \text{const.},$$

en posant, pour abréger,

$$\int \frac{dz}{z[1 - 2zf(z)]} = F(z) = \int \frac{\varpi(z).dz}{z[\varpi(z) - 2z]}.$$

L'élimination de y' entre les formules (121) et (123) donnera l'intégrale générale de l'équation (121).

§ XXIII.

EXEMPLE VI.

Problème. — *Trouver une courbe telle, que la perpendiculaire abaissée de l'origine sur la normale soit toujours égale à une fonction quelconque du rayon vecteur.*

La condition donnée conduit immédiatement à cette équation

$$(124) \qquad \frac{x + yy'}{\sqrt{1 + y'^2}} = f(x^2 + y^2).$$

Pour en trouver le facteur d'intégration à l'aide du théorème IX, nous observons qu'on a

$$\varphi = f(x^2 + y^2) - \frac{x + yy'}{\sqrt{1 + y'^2}},$$

et partant

(125)
$$\frac{d\varphi}{dy} = 2y \cdot f' - \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}},$$

$$\frac{d\varphi}{dy'} = \frac{xy' - y}{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

En différentiant l'équation (124) on obtiendra

$$2yf' = \frac{y(1 + y'^2)^2 + yy''(y - xy')}{(x + yy').(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}},$$

ce qui, substitué dans l'équation (125), donnera

$$\frac{d\varphi}{dy} = \frac{1 + y'^2 + yy''}{x + yy'} \cdot \frac{y - xy'}{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{y - xy'}{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{d \log(x + yy')}{dx},$$

d'où, en vertu de l'équation (96), on aura le facteur d'intégration

(125 *bis*)
$$\mathfrak{M} = \frac{1}{x + yy'}.$$

L'intégrale cherchée de l'équation (124) devient donc

$$\int \frac{dy - y'dx}{x + yy'} = \text{const.},$$

d'où, si l'on en retranche

$$\int \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} - \text{arc}\left(\text{tang} = \frac{y}{x}\right) = 0,$$

on aura

(126)
$$\text{arc}\left(\text{tang} = \frac{y}{x}\right) - \frac{1}{2}\int B \cdot \frac{d(r^2)}{r^2} = \text{const.},$$

en posant, pour abréger,

$$(127) \qquad r^2 = x^2 + y^2, \quad \mathrm{B} = \frac{xy' - y}{x + yy'}.$$

D'ailleurs on trouvera sans difficulté

$$\mathrm{B}^2 + 1 = \frac{x^2 + y^2}{\left(\frac{x + yy'}{\sqrt{1 + y'^2}}\right)^2},$$

d'où, en vertu de l'équation (124), on aura

$$\mathrm{B} = \pm \frac{\sqrt{r^2 - [f(r^2)]^2}}{f(r^2)},$$

ce qui, substitué dans l'équation (126), donnera pour l'intégrale générale de l'équation (124),

$$(128) \qquad 2 \operatorname{arc}\left(\operatorname{tang} = \frac{y}{x}\right) \pm \mathrm{F}(x^2 + y^2) = \text{const}.$$

en posant, pour abréger,

$$(129) \qquad \int \frac{\sqrt{z - [f(z)]^2} . dz}{z . f(z)} = \mathrm{F}(z).$$

Corollaire I. — Soit, comme à l'ordinaire,

$$ds^2 = dx^2 + dy^2,$$

et de plus

$$s = \psi(x^2 + y^2) = \psi;$$

on a immédiatement

$$s' = \sqrt{1 + y'^2} = 2\psi' . (x + yy'),$$

ou, ce qui revient au même,

$$\frac{x + yy'}{\sqrt{1 + y'^2}} = \frac{1}{2\psi'},$$

d'où il suit qu'en remplaçant dans l'équation (129) $f(z)$ par $\frac{1}{2\psi'(z)}$, c'est-à-dire qu'en faisant

$$\int \frac{dz}{z}\sqrt{4z(\psi'(z))^2 - 1} = F(z),$$

la formule (128) déterminera aussi *la courbe dont l'arc est toujours égal à une fonction quelconque du rayon vecteur.*

Pour vérifier la formule (128) dans un cas spécial, faisons

$$\psi(x^2 + y^2) = \sqrt{x^2 + y^2},$$

c'est-à-dire cherchons la courbe dont l'arc est toujours égal au rayon vecteur. En effet, à cause de

$$\psi(z) = \sqrt{z},$$

on aura

$$4z[\psi'(z)]^2 = 1,$$

et partant

$$F(z) = \text{const}.$$

L'équation de la courbe devient donc

$$2\,\text{arc}\left(\text{tang} = \frac{y}{x}\right) = \text{const.},$$

ou, ce qui revient au même,

$$y = A.x.$$

Corollaire II. — En faisant dans l'équation (129)

$$f(z) = \sqrt{z - [f_1(z)]^2},$$

l'équation (124) sera changée en celle-ci

$$\frac{xy' - y}{\sqrt{1 + y'^2}} = f_1(x^2 + y^2)$$

dont on a l'intégrale générale

$$2 \operatorname{arc}\left(\operatorname{tang} = \frac{y}{x}\right) \pm F_1(x^2 + y^2) = \text{const.}, \tag{130}$$

où

$$F_1(z) = \int \frac{f_1(z)\, dz}{z\sqrt{z - [f_2(z)]^2}}.$$

Cette formule donnera *la courbe où la perpendiculaire abaissée de l'origine sur la tangente est toujours égale à une fonction quelconque du rayon vecteur.*

La formule (130), que nous venons de trouver, s'accorde parfaitement avec celle que Lacroix a proposée dans son *Traité du calcul différentiel et intégral*, t. II, p. 292.

§ XXIV.

EXEMPLE VI.

Problème. — *Trouver la courbe où la perpendiculaire abaissée de l'origine sur la tangente est toujours une fonction quelconque de la perpendiculaire abaissée sur la normale.*

La condition donnée conduit immédiatement à l'équation

$$\frac{xy' - y}{\sqrt{1 + y'^2}} = f\left(\frac{x + yy'}{\sqrt{1 + y'^2}}\right). \tag{131}$$

Supposons

$$u = \frac{xy' - y}{\sqrt{1 + y'^2}} \quad \text{et} \quad v = \frac{x + yy'}{\sqrt{1 + y'^2}},$$

d'où nous aurons

$$u^2 + v^2 = x^2 + y^2,$$

et partant, en vertu de l'équation (131),

$$v^2 + [f(v)]^2 = x^2 + y^2,$$

laquelle formule, résolue par rapport à v, donnera

$$v = \varpi(x^2 + y^2).$$

L'équation (131) pourra donc être présentée sous la forme

$$\frac{x + yy'^2}{\sqrt{1+y'^2}} = \varpi(x^2 + y^2),$$

$\varpi(z)$ étant l'expression de v en z qu'on obtient par la résolution de l'équation

$$v^2 + [f(v)]^2 = z.$$

A l'aide des formules que nous venons de proposer dans l'exemple V, nous pourrions immédiatement trouver l'intégrale cherchée; mais le facteur d'intégration

$$\frac{1}{x + yy'}$$

étant connu en vertu de l'équation (125 *bis*), nous donnerons ci-après sous une autre forme l'intégrale générale de l'équation (131), en effectuant immédiatement la quadrature

$$\int \frac{\mathrm{d}y - y'\mathrm{d}x}{x + yy'} = \text{const.}$$

En effet, à cause de

$$\frac{\mathrm{d}y - y'\mathrm{d}x}{\sqrt{1+y'^2}} = \frac{(yy' + x)\,\mathrm{d}y'}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}} - \mathrm{d}.\left(\frac{xy' - y}{\sqrt{1+y'^2}}\right),$$

il s'ensuit

$$\frac{dy - y'\mathrm{d}x}{x + yy'} = \frac{\mathrm{d}y'}{1+y'^2} - \frac{\sqrt{1+y'^2}}{x + yy'}\,\mathrm{d}.\left(\frac{xy' - y}{\sqrt{1+y'^2}}\right),$$

et partant, en vertu de l'équation (131), on aura l'intégrale cherchée

$$(132) \qquad \operatorname{arc}(\operatorname{tang} = y') - \mathrm{F}\left(\frac{x + yy'}{\sqrt{1+y'^2}}\right) = \text{const.},$$

en posant, pour abréger,

$$\int \frac{f'(z)}{z}\,\mathrm{d}z = \mathrm{F}(z)$$

et en éliminant y' entre les formules (131) et (132).

§ XXV.

EXEMPLE VII.

Trouver l'intégrale générale de l'équation différentielle

$$(133) \qquad x.f_1\left(\frac{x}{y'} + ay\right) = y'.f\left(\frac{x}{y'}\sqrt{1+ay'^2}\right).$$

Faisons, pour abréger,

$$(134) \qquad z = \frac{x}{y'} + ay, \quad u = \frac{x}{y'}\sqrt{1+ay'^2};$$

nous aurons, en différentiant,

$$(134\ bis) \qquad \sqrt{1+ay'^2}.\mathrm{d}u = \mathrm{d}z.$$

Pour trouver le facteur propre à l'intégration à l'aide du théorème IX, écrivons l'équation (133) sous la forme

$$x.f_1(z) - y'.f(u) = 0,$$

d'où, en différentiant, nous obtiendrons

$$(135) \qquad \frac{f'(u)}{\sqrt{1+ay'^2}} = \frac{x}{y'}\cdot f_1'(z) + f_1(z) - ay'.f_1(z)\,.\,\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}z}.$$

D'ailleurs, en observant que

$$\varphi = x.f_1(z) - y'.f(u),$$

nous aurons

$$\frac{d\varphi}{\mathrm{d}y} = ax \, . \, f_1'(z)$$

et, à l'aide de l'équation (135),

$$\frac{d\varphi}{\mathrm{d}y'} = -\, ax \, . \, f_1(z) \, . \, \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}z};$$

et, par suite,

$$\frac{d\varphi}{\mathrm{d}y} : \frac{d\varphi}{\mathrm{d}y'} = -\frac{\mathrm{d}\,.\,f_1(z)}{f_1(z)\,\mathrm{d}x}.$$

En vertu de l'équation (96), nous aurons donc le facteur propre à l'intégration

$$\mathfrak{M} = \frac{1}{f_1(z)} = \frac{1}{f_1\left(\dfrac{x}{y'} + ay\right)},$$

et l'intégrale cherchée

$$\text{const.} = \int \frac{\mathrm{d}y - y'\,\mathrm{d}x}{f_1(z)} = \int \frac{\mathrm{d}z - \left[\mathrm{d}\left(\dfrac{x}{y'}\right) + ay'\,\mathrm{d}x\right]}{f_1(z)},$$

ou, ce qui revient au même,

$$(136) \qquad \text{const.} = \int \frac{\mathrm{d}z}{f_1(z)} - \int \frac{\mathrm{d}\left(\dfrac{x}{y'}\right) + ay'\,\mathrm{d}x}{f_1(z)}.$$

Mais on a immédiatement

$$(137) \qquad \mathrm{d}\left(\frac{x}{y'}\right) + ay'\,\mathrm{d}x = \frac{y'}{x} \cdot u\,\mathrm{d}u;$$

donc en faisant, pour abréger,

$$\int \frac{\mathrm{d}z}{f_1(z)} = \mathrm{F}_1(z), \quad \int \frac{u\,\mathrm{d}u}{f(u)} = \mathrm{F}(u),$$

on aura enfin, à l'aide des formules (133) et (136),

$$(138) \qquad \mathrm{F}_1\left(\frac{x}{y'} + ay\right) - \mathrm{F}\left(\frac{x}{y'}\sqrt{1 + ay'^2}\right) = \text{const.}$$

L'élimination de y' entre cette formule et l'équation (133) donnera l'intégrale générale de celle-ci.

Observation I. — A l'aide des formules (134) et (134 *bis*) on aura

$$u\,du = \frac{x}{y'}\,dz,$$

et partant, en vertu de l'équation (133),

$$\frac{dz}{f_1(z)} - \frac{u\,du}{f(u)} = 0,$$

ce qui donnera immédiatement la formule (138).

Observation II. — Si l'équation proposée était de la forme

$$\frac{x}{y'} + ay = f\left(\frac{x}{y'}\sqrt{1+ay'^2}\right) = f(u),$$

en différentiant on aurait, à l'aide de l'équation (134 *bis*),

$$\left[\sqrt{1+ay'^2} - f'(u)\right] du = 0.$$

En supposant

$$du = 0,$$

on aura sans difficulté l'intégrale générale

$$[ay - f(k)]^2 + ax^2 = k,$$

k étant une constante arbitraire; la supposition

$$f'(u) = \sqrt{1+ay'^2}$$

donnera (en général) une solution singulière.

§ XXVI.

EXEMPLE VIII.

Trouver l'intégrale générale de l'équation différentielle

$$(139)\qquad \frac{(xy'-y)^m}{xy'+ay} = f(y').$$

Faisons

$$f(y') = \frac{1}{f_1(y')};$$

l'équation (139) pourra être présentée sous cette forme

$$\varphi = (xy'-y)^m . f_1(y') - xy' - ay = 0,$$

d'où nous aurons

$$\frac{d\varphi}{dy} = -\frac{m(xy'+ay)}{xy'-y} - a = -(m+a) - \frac{m(a+1)y}{xy'-y},$$

$$\frac{d\varphi}{dy'} = -\frac{\frac{d\varphi}{dx} + \frac{d\varphi}{dy}.y'}{y''} = \frac{(a+1).dx}{d\log y'}.$$

En cherchant à l'aide du théorème IX le facteur propre à l'intégration, à cause de

$$\frac{d\varphi}{dy} : \frac{d\varphi}{dy'} = -\frac{m+a}{a+1}.\frac{d\log y'}{dx} - \frac{my}{xy'-y}.\frac{y''}{y'}$$

$$= -\frac{m+a}{a+1}.\frac{d\log y'}{dx} - m.\frac{d\log\left(x-\frac{y}{y'}\right)}{dx},$$

ce facteur deviendra

$$\mathfrak{M} = (y')^{\frac{a(m-1)}{a+1}}.(xy'-y)^{-m},$$

et, par suite, l'intégrale cherchée

$$(140)\qquad \text{const.} = \int (y')^{\frac{a(m-1)}{a+1}}.(xy'-y)^{-m}(dy - y'dx).$$

D'ailleurs on a immédiatement

$$dy - y'\,dx = d(xy' - y) - x\,dy',$$

ce qui, substitué dans l'équation (140), lui fait prendre la forme

$$\begin{aligned}
\text{const.} &= \int (y')^{\frac{a(m-1)}{a+1}} (xy' - y)^{-m}\, d(xy' - y) \\
&\quad - \int (y')^{\frac{a(m-1)}{a+1}} . (xy' - y)^{-m} . x\,dy' \\
&= \frac{(y')^{\frac{a(m-1)}{a+1}} (xy' - y)^{1-m}}{1-m} - \frac{1}{a+1} . \int (y')^{\frac{a(m-1)}{a+1}} . \frac{xy' + ay}{(xy' - y)^m}\, dy',
\end{aligned}$$

d'où en posant, pour abréger,

$$\int (y')^{\frac{a(m-1)}{a+1}} . \frac{dy'}{f(y')} = F(y'),$$

on conclut

$$(141) \qquad \frac{(y')^{\frac{a(m-1)}{a+1}} . (xy' - y)^{1-m}}{1-m} - \frac{F(y')}{a+1} = \text{const.}$$

L'élimination entre cette formule et l'équation (139) donnera enfin l'intégrale cherchée.

Observation I. — Pour $m = 1$, il faut dans l'équation (141) remplacer

$$\frac{(y')^{\frac{a(m-1)}{a+1}} . (xy' - y)^{1-m}}{1-m} \quad \text{par} \quad \log(xy' - y).$$

Observation II. — Pour $a + 1 = 0$, la formule (141) est en défaut; mais, dans ce cas, l'équation proposée appartient évidemment à la classe qui est connue depuis longtemps sous le nom d'*équation de Clairaut*.

§ XXVII.

EXEMPLE IX.

Trouver l'intégrale générale de l'équation différentielle

$$(142) \qquad xy' - ry = y^m . f(y^{1-r} . y'^r).$$

Faisons, pour abréger,

$$u = y^{1-r} . (y')^r,$$

d'où l'on conclut

$$\frac{du}{dx} = y' . \left(\frac{y}{y'}\right)^{-r} . \frac{d\left(x - r . \frac{y}{y'}\right)}{dx}.$$

Pour trouver, à l'aide du théorème X, le facteur propre à l'intégration, nous écrivons l'équation proposée sous la forme

$$\varphi = y^m . f(u) - xy' + ry = 0,$$

ce qui donnera

$$\frac{d\varphi}{dx} = -y',$$

$$(143) \qquad \frac{d\varphi}{d\left(\frac{1}{y'}\right)} = -y'^2 \left[\frac{ry}{y'} . y^m . \left(\frac{y}{y'}\right)^{-r} . f'(u) - x\right].$$

D'ailleurs, en différentiant l'équation (142), nous aurons

$$y^m . \left(\frac{y}{y'}\right)^{-r} . f'(u) = 1 + \frac{\left(y'' - \frac{my'^2}{y}\right)\left(x - r . \frac{y}{y'}\right) dx}{y' . d\left(x - r . \frac{y}{y'}\right)},$$

d'où, à cause de

$$y'' - \frac{my'^2}{y} = \frac{y'^2}{ry} . \frac{d\left(x - r . \frac{y}{y'}\right)}{dx} + \frac{[r(1-m) - 1]y'^2}{ry},$$

nous concluons

$$y^m . \left(\frac{y}{y'}\right)^{-r} . f'(u) = 1 + \frac{y'}{ry}\left(x - r.\frac{y}{y'}\right) + \frac{r(1-m)-1}{r} . \frac{y'}{y} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\left(x - r\frac{y}{y'}\right)},$$

ce qui, substitué dans l'équation (143), lui fait prendre la forme

$$\frac{d\varphi}{\mathrm{d}\left(\frac{1}{y'}\right)} = -y' . \frac{[r(1-m)-1]\,\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\log\left(x - r\frac{y}{y'}\right)}.$$

Par suite, en vertu de l'équation (99), nous aurons le facteur propre à l'intégration

$$\mathfrak{M}_1 = \left(x - r.\frac{y}{y'}\right)^{\frac{1}{r(1-m)-1}},$$

et l'intégrale cherchée

$$\begin{aligned}\text{const.} &= \int \left(x - r.\frac{y}{y'}\right)^{\frac{1}{r(1-m)-1}} . (\mathrm{d}y - y'\mathrm{d}x) \\ &= \int \left(x - r.\frac{y}{y'}\right)^{\frac{1}{r(1-m)-1}} . \left[\frac{ry\,\mathrm{d}y' + (1-r)y'\,\mathrm{d}y}{y'^2} - \mathrm{d}\left(x - r\frac{y}{y'}\right)\right],\end{aligned}$$

ou, ce qui revient au même,

$$\text{const.} = \int \frac{(xy' - ry)^{\frac{1}{r(1-m)-1}} . y}{(y')^{\frac{r(1-m)}{r(1-m)-1}}} . \frac{\mathrm{d}u}{u} - \frac{r(1-m)-1}{r(1-m)} . \left(x - r\frac{y}{y'}\right)^{\frac{r(1-m)}{r(1-m)-1}},$$

d'où, en posant

$$\int \left(\frac{f(u)}{u^{r(1-m)-m}}\right)^{\frac{1}{r(1-m)-1}} \mathrm{d}u = \mathrm{F}(u),$$

on obtient, en vertu de l'équation (142), après quelques réductions très-faciles,

$$(144)\qquad F(y^{1-r}.y'^r) - \frac{r(1-m)-1}{r(1-m)}\left(x - r.\frac{y}{y'}\right)^{\frac{r(1-m)}{r(1-m)-1}} = \text{const}.$$

L'élimination de y' entre cette formule et l'équation (142) nous donnera enfin l'intégrale générale de celle-ci.

Observation I. — Pour $m = 1$, il faut remplacer le second terme de l'équation (144) par

$$-\log\left(x - r\cdot\frac{y}{y'}\right)\cdot$$

Observation II. — Si l'on a

$$r(1-m) - 1 = 0,$$

la formule (144) devient en défaut; mais dans ce cas l'équation proposée prend la forme

$$(145)\qquad xy' - ry = y^{1-\frac{1}{r}}.f(u),$$

d'où l'on obtient, en différentiant,

$$\left[x - ru^{1-\frac{1}{r}}.f'(u)\right]du = 0.$$

En posant $du = 0$, d'où l'on conclut

$$u = y^{1-r}.y'^r = c^r,$$

ou, ce qui revient au même,

$$y' = cy^{1-\frac{1}{r}},$$

c étant une constante arbitraire, nous aurons, en substituant dans l'équation (145) la valeur de y', l'intégrale générale de l'équation (145)

$$cx - f(c^r) = ry^{\frac{1}{r}}.$$

En posant

$$x - ru^{1-\frac{1}{r}}.f'(u) = 0,$$

on aura (en général) une solution singulière.

§ XXVIII.

EXEMPLE X.

Trouver l'intégrale générale de l'équation différentielle

$$(146) \qquad f_1(xy' - ry) = x.f(x^{1-r}.y').$$

Faisons, pour abréger,

$$z = xy' - ry, \quad u = x^{1-r}.y',$$

d'où l'on obtiendra sans difficulté

$$(146\ bis) \qquad \mathrm{d}u = x^{-r}\,\mathrm{d}z;$$

la différentiation de l'équation (146) donnera

$$(147) \qquad x^{2-r}.f'(u) = x.f_1'(z) - \frac{f_1(z)}{\mathrm{d}z}.$$

Pour avoir à l'aide du théorème IX le facteur propre à l'intégration, nous écrivons l'équation (146) sous la forme

$$\varphi = f_1(z) - x.f(u) = 0,$$

d'où l'on conclut

$$\frac{d\varphi}{\mathrm{d}y} = -r.f_1'(z),$$

et, à l'aide de l'équation (147),

$$\frac{d\varphi}{\mathrm{d}y'} = \frac{f_1(z)}{\mathrm{d}z}.$$

Par suite, en ayant

$$\frac{d\varphi}{dy}:\frac{d\varphi}{dy'} = -r\cdot\frac{d.f_1(z)}{f_1(z)},$$

nous obtiendrons, en vertu de l'équation (96), le facteur propre à l'intégration

$$\mathfrak{M} = \frac{1}{[f_1(z)]^r} = \frac{1}{[f_1(xy'-ry)]^r},$$

et l'intégrale cherchée

$$\text{const.} = \int\frac{dy - y'dx}{[f_1(z)]^r} = \int\frac{x^r du - dz}{[f_1(z)]^r}.$$

En observant la relation (146) et en posant, pour abréger,

$$\int\frac{du}{[f(u)]^r} = F(u), \quad \int\frac{dz}{[f_1(z)]^r} = F_1(z),$$

on aura enfin

$$(148) \qquad F(x^{1-r}.y') - F_1(xy' - ry) = \text{const.}$$

Observation I. — A l'aide des formules (146) et (146 *bis*) on aura

$$\frac{du}{[f(u)]^r} - \frac{dz}{[f_1(z)]^r} = 0,$$

ce qui donnera immédiatement la formule (148).

Observation II. — Si l'équation proposée était de la forme

$$(149) \qquad xy' - ry = f(x^{1-r}.y') = f(u),$$

on obtiendrait, en différentiant,

$$[f'(u) - x^{-r}]\,du = 0.$$

En posant

$$du = 0,$$

d'où l'on conclut

$$u = x^{1-r}.y' = c,$$

c étant une constante arbitraire, on aura l'intégrale générale de l'équation (149)

$$cx^r - ry = f(c).$$

§ XXIX.

EXEMPLE XI.

Trouver l'intégrale générale de l'équation différentielle

$$(150) \qquad xy' + ay + b = f(x.y'^n).$$

Faisons, pour abréger,

$$u = x.y'^n,$$

d'où il vient

$$\mathrm{d}u = (y')^{n-1}(y'\,\mathrm{d}x + nx\,\mathrm{d}y').$$

En différentiant l'équation (150), nous aurons

$$(151) \qquad f'(u) = \frac{x\,\mathrm{d}y' + (a+1)y'\,\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u}.$$

Pour trouver, à l'aide du théorème IX, le facteur propre à l'intégration, nous écrivons l'équation proposée sous la forme

$$\varphi = f(u) - xy' - ay - b = 0,$$

d'où l'on conclut, à l'aide de l'équation (151),

$$\frac{d\varphi}{\mathrm{d}y} = -a, \quad \frac{d\varphi}{\mathrm{d}y'} = [n(a+1) - 1]\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\log u}.$$

Par suite, en vertu de l'équation (96), nous aurons le facteur cherché

$$\mathfrak{M} = (u)^{-\frac{a}{n(a+1)-1}},$$

et l'intégrale dont il s'agit

$$\begin{aligned}\text{const.} &= \int u^{-\frac{a}{n(a+1)-1}}(\mathrm{d}y - y'\,\mathrm{d}x)\\ &= \int u^{-\frac{a}{n(a+1)-1}}\,\mathrm{d}y - \int (y')^{\frac{n-1}{n(a+1)-1}}\cdot x^{-\frac{a}{n(a+1)-1}}\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

En intégrant par parties le second terme, nous aurons après quelques réductions bien faciles

$$\int u^{-\frac{a}{n(a+1)-1}}[x\,\mathrm{d}y' + (a+1)\,y'\,\mathrm{d}y] - \frac{n(a+1)-1}{n-1}\cdot(x^{a+1}\cdot y')^{\frac{n-1}{n(a+1)-1}} = \text{const.}.$$

ce qui, en vertu de l'équation (151), en posant

$$\int \frac{f'(u)\,\mathrm{d}u}{(u)^{\frac{a}{n(a+1)-1}}} = \mathrm{F}(u),$$

donnera enfin, en vertu de l'équation (151),

$$\mathrm{F}(xy'^n) - \frac{n(a+1)-1}{n-1}\cdot(x^{a+1}\cdot y')^{\frac{n-1}{n(a+1)-1}} = \text{const.}$$

En éliminant y' entre cette formule et l'équation (150), nous aurons l'intégrale générale de celle-ci.

Observation I. — Pour $n=1$, il faut remplacer

$$\frac{n(a+1)-1}{n-1}(x^{a+1}\cdot y')^{\frac{n-1}{n(a+1)-1}} \quad \text{par} \quad \log(x^{a+1}\cdot y').$$

Observation II. — Si l'on a

$$n(a+1)-1=0, \quad \text{ou, ce qui revient au même,} \quad a=\frac{1}{n}-1,$$

l'équation proposée devient

$$xy' - y + \frac{y}{n} + b = f(u),$$

qui différentiée donnera

$$\left[\frac{y'^{n-1}}{n} - f'(u)\right] du = 0.$$

En posant $du = 0$, d'où il suit

$$u = xy'^n = c^n,$$

c étant une constante arbitraire, nous aurons l'intégrale générale

$$cx^{1-\frac{1}{n}} - \left(1 - \frac{1}{n}\right) y + b = f(c^n).$$

Si l'on avait posé

$$\frac{y'^{n-1}}{n} - f'(u) = 0,$$

on aurait eu (en général) une solution singulière.

§ XXX.

EXEMPLE XII.

Trouver l'intégrale générale de l'équation différentielle

$$(152) \qquad \frac{x + yy'}{\sqrt{1 + y'^2}} = f_1(y') \cdot f\left(\frac{xy' - y}{\sqrt{1 + y'^2}}\right).$$

Soit, pour abréger,

$$(153) \qquad u = \frac{x + yy'}{\sqrt{1 + y'^2}},$$

$$(154) \qquad v = \frac{xy' - y}{\sqrt{1 + y'^2}},$$

d'où il suit

$$(155) \qquad \begin{cases} \dfrac{du}{dx} = \sqrt{1 + y'^2} - \dfrac{vy''}{1 + y'^2}, & \dfrac{dv}{dx} = \dfrac{u \cdot y''}{1 + y'^2}, \\ \dfrac{du}{dy'} = - \dfrac{v}{1 + y'^2}, & \dfrac{dv}{dy'} = \dfrac{u}{1 + y'^2}. \end{cases}$$

L'équation proposée, que nous pouvons écrire sous la forme

$$(155\ bis)\qquad \varphi = u - f_1(y').f(v) = 0,$$

donnera, en la différentiant, à l'aide de l'équation (155),

$$(156)\qquad \frac{f_1(y').f'(v)}{1+y'^2} = \frac{du}{u\,dy'} - \frac{d.f_1(y')}{f_1(y')\,dy'}.$$

D'ailleurs, à l'aide de l'équation (156), nous aurons de l'équation (155 *bis*),

$$\frac{d\varphi}{dy} = \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} + \frac{\sqrt{1+y'^2}}{dy'}\left[\frac{du}{u} - \frac{df_1(y')}{f_1(y')}\right],$$

$$\frac{d\varphi}{dy'} = -\frac{\sqrt{1+y'^2}}{dy'}\cdot dx,$$

d'où il suit

$$\frac{d\varphi}{dy} : \frac{d\varphi}{dy'} = -\frac{y'\,dy'}{(1+y'^2)\,dx} - \frac{du}{u\,dx} + \cdot\frac{df_1(y')}{f_1(y').dx},$$

et par suite, en vertu de l'équation (96), nous aurons le facteur propre à l'intégration

$$\mathfrak{M} = \frac{f_1(y')}{x+yy'}.$$

L'intégrale cherchée devient donc

$$\text{const.} = \int \frac{f_1(y')}{x+yy'}(dy - y'\,dx) = \int \frac{1}{f(v)}\cdot\frac{dy - y'\,dx}{\sqrt{1+y'^2}},$$

d'où, à cause de

$$\frac{1}{f(v)}\cdot\frac{dy - y'\,dx}{\sqrt{1+y'^2}} = \frac{f_1(y')\,dy'}{1+y'^2} - \frac{dv}{f(v)},$$

en posant

$$\int \frac{f_1(y')\,dy'}{1+y'^2} = F_1(y'),\quad \int \frac{dv}{f(v)} = F(v),$$

nous aurons enfin

$$(157) \qquad F_1(y') - F\left(\frac{xy' - y}{\sqrt{1+y'^2}}\right) = \text{const.}$$

L'élimination de y' entre cette formule et l'équation (152) donnera l'intégrale générale de celle-ci.

Observation I. — A l'aide de la seconde des formules (155) et de l'équation (155 *bis*) on aura

$$\frac{f_1(y').\,dy'}{1+y'^2} - \frac{d\varphi}{f(\varphi)} = 0,$$

ce qui donne immédiatement la formule (157).

Observation II. — Pour $f_1(y') = 1$, la formule (157) se réduit à celle que nous avons proposée dans l'équation (132).

§ XXXI.

EXEMPLE XIII.

Trouver l'intégrale générale de l'équation différentielle

$$(158) \qquad \frac{xy' + my}{(y')^r} = f\left(\frac{xy' + ny}{(y')^s}\right),$$

m, n, r et s étant des constantes quelconques qui satisfont à la seule condition

$$(159) \qquad (r - s)(m - n)[m - s(m + 1)][n - r(n + 1)] = 0.$$

Soit, pour abréger,

$$(160) \qquad u = \frac{xy' + my}{(y')^r},$$

$$(161) \qquad v = \frac{xy' + ny}{(y')^s},$$

d'où l'on conclut

$$(162)\qquad \left\{\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} &= \frac{(m+1)y'^2+[(1-r)xy'-mry].y''}{(y')^{r+1}},\\ \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} &= \frac{(n+1)y'^2+[(1-s)xy'-nsy].y''}{(y')^{s+1}},\end{aligned}\right.$$

et de plus

$$(163)\qquad \left\{\begin{aligned}\frac{du}{\mathrm{d}y'} &= \frac{(1-r)xy'-mry}{(y')^{r+1}}, & \frac{du}{\mathrm{d}y} &= \frac{m}{(y')^r},\\ \frac{dv}{\mathrm{d}y'} &= \frac{(1-s)xy'-nsy}{(y')^{s+1}}, & \frac{dv}{\mathrm{d}y} &= \frac{n}{(y')^s}.\end{aligned}\right.$$

L'équation (158), qui pourra être présentée sous la forme

$$(164)\qquad \varphi = f(v) - u = 0,$$

donnera, en la différentiant,

$$(165)\qquad f'(v) = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v}.$$

Pour trouver, à l'aide du théorème IX, le facteur propre à l'intégration, nous aurons des équations (164) et (165)

$$\frac{d\varphi}{\mathrm{d}y} = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v}\cdot\frac{dv}{\mathrm{d}y} - \frac{du}{\mathrm{d}y},$$
$$\frac{d\varphi}{\mathrm{d}y'} = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v}\cdot\frac{dv}{\mathrm{d}y'} - \frac{du}{\mathrm{d}y'},$$

et de plus, à l'aide des relations (162) et (163),

$$\frac{d\varphi}{\mathrm{d}y} = \frac{1}{(y')^r}\cdot\frac{(n-m)y'^2+[(r-s-p)xy'-(ns-mr-q)y].y''}{(n+1)y'^2+[(1-s)xy'-nsy].y''}.$$
$$\frac{d\varphi}{\mathrm{d}y'} = \frac{1}{(y')^{r-1}}\cdot\frac{pxy'-qy}{(n+1)y'^2+[(1-s)xy'-nsy].y''},$$

en posant, pour abréger,

$$(166)\qquad p = (1-s)(m+1) - (1-r)(n+1),$$
$$(167)\qquad q = ns(m+1) - mr(n+1).$$

Par suite, nous aurons

$$\frac{d\varphi}{\mathrm{d}y}:\frac{d\varphi}{\mathrm{d}y'}=\frac{(n-m)y'^2+[(r-s-p)\,xy'-(ns-mr-q)y]\,.\,y''}{y'(pxy'-qy)},$$

ou, ce qui revient au même,

$$\frac{d\varphi}{\mathrm{d}y}:\frac{d\varphi}{\mathrm{d}y'}=\frac{k.\mathrm{d}y'}{y'}+l\frac{(p-q)\,y'+pxy''}{pxy'-qy}=\frac{k\ \mathrm{d}\log y'+l.\mathrm{d}\log(pxy'-qy)}{\mathrm{d}x},$$

ayant posé

$$(168)\qquad k.q=ns-mr-q,$$

$$(169)\qquad (p-q).l=n-m,$$

$$(170)\qquad a=ns(1-r)-mr(1-s),$$

et en supposant que m, n, r et s soient tels, que

$$(171)\qquad \frac{1}{p}+\frac{1}{a}=\frac{1}{q}.$$

Le facteur propre à l'intégration devient donc

$$\mathfrak{M}=(y')^k(pxy'-qy)^l,$$

et l'intégrale cherchée

$$\text{const.}=\int(y')^k(pxy'-qy)^l(\mathrm{d}y-y'\mathrm{d}x),$$

p et q étant donnés par les formules (166) et (167), k et l par les formules (168) et (169).

En ayant identiquement

$$a(p-q)-pq=(r-s)(m-n)[m-s(m+1)][n-r(n+1)],$$

on verra sans difficulté que la condition fixée par l'équation (171) n'est que celle donnée par l'équation (159).

Cela étant ainsi, nous allons examiner spécialement chacun des quatre cas où la condition de l'équation (159) est satisfaite.

I^er cas : $r = s$. Dans ce cas on trouvera

$$p = (1 - s)(m - n),$$
$$q = -s(m - n),$$
$$k = 0, \quad l = -1,$$

et l'intégrale cherchée

$$(172) \quad \begin{cases} \text{const.} = \displaystyle\int \frac{dy - y'\,dx}{(1-s)xy' + sy} \\ \qquad = \log[(1-s)xy' + sy) - \displaystyle\int \frac{y'\,dx + (1-s)\,x\,dy'}{(1-s)\,xy' + sy}. \end{cases}$$

D'ailleurs, à cause de $r = s$, il suit de l'équation (162)

$$y'\,dx + (1-s)\,x\,dy' = \frac{(y')^s(m\,dv - n\,du)}{m - n};$$

et en posant, pour abréger,

$$A = m - s(m+1),$$
$$B = n - s(n+1),$$

on conclut des équations (160) et (161)

$$(m - n)[(1-s)\,xy' + sy] = (y')^s(Av - Bu).$$

Par suite on aura de l'équation (172)

$$\text{const.} = \log[(1-s)\,xy' + sy] - \int \frac{m\,dv - n\,du}{Av - Bu}$$
$$= \log[(1-s)\,xy' + sy] - \int \frac{[m - nf'(v)]\,dv}{Av - Bf(v)},$$

ou, ce qui revient au même,

$$(173) \qquad \log[(1-s)\,xy' + sy) - F\left(\frac{xy' + ny}{(y')^s}\right) = \text{const.},$$

en posant

$$\int \frac{[m - nf'(v)]\,dv}{Av - Bf(v)} = F(v).$$

L'élimination de y' entre l'équation (173) et l'équation différentielle proposée donnera l'intégrale générale de celle-ci.

II^e cas : $m = n$. Dans ce cas on aura

$$p = (m+1)(r-s),$$
$$q = -m(m+1)(r-s),$$
$$l = 0, \qquad k = -\frac{m}{m+1},$$

et l'intégrale cherchée

$$\begin{aligned}\text{const.} &= \int (y')^k \{d[(1-s)xy' + sy] - [dy + (1-s)x\,dy']\} \\ &= (y')^k[(1-s)xy' + sy] - \frac{1}{m+1}\cdot\int (y')^{k-1}\{[(1-s)xy' - msy]\,dy' \\ &\qquad + (m+1)y'^2\,dy\},\end{aligned}$$

laquelle formule, à cause de

$$[(1-s)xy' - msy)\,dy' + (m+1)y'^2\,dy = (y')^{s+1}.\,dv,$$

peut être présentée sous la forme

$$\text{const.} = (y')^k[(1-s)xy' + sy) - \frac{1}{m+1}\int (y')^{s+k}.\,dv.$$

D'ailleurs, à l'aide de l'équation (158), on obtiendra

$$(y')^{s-r} = \frac{f(v)}{v},$$

et, en observant la valeur de k,

$$(y')^{s+k} = \left(\frac{f(v)}{v}\right)^{\frac{m-s(m+1)}{(m+1)(r-s)}},$$

d'où l'on aura enfin

$$(174) \qquad \frac{(1-s)xy' + sy}{(y')^{\frac{m}{m+1}}} - \frac{1}{m+1}\cdot F\left(\frac{xy' + my}{(y')^s}\right) = \text{const.}$$

en faisant, pour abréger,

$$\int \left(\frac{f(v)}{v}\right)^{\frac{m-s(m+1)}{(m+1)(r-s)}} . \, dv = F(v).$$

L'élimination de y' entre l'équation (174) et l'équation proposée donnera l'intégale générale de celle-ci.

Observation I. — Pour $m+1=0$, la formule (174) devient en défaut; mais dans ce cas l'équation proposée, résolue par rapport à $xy'-y$, se réduira à la forme connue de Clairaut.

III^e cas : $s(m+1)-m=0$. Dans ce cas on aura

$$(175) \qquad \begin{cases} p = r(n+1)-n, \\ q = -mp, \\ k = -\dfrac{n(r-s)}{p}, \\ l = \dfrac{n-s(n+1)}{p}, \\ k+s+lr=0, \end{cases}$$

et l'intégrale cherchée

$$\begin{aligned} \text{const.} &= \int (y')^k (xy'+my)^l [\,d(xy'+my) - (x\,dy + (m+1)\,y'\,dx)] \\ &= \frac{(y')^k (xy'+my)^{l+1}}{l+1} - \frac{1}{n+1} \cdot \int (y')^{k-1} (xy'+my)^l \\ &\qquad \times [(m+1)(n+1)y'^2\,dx + (xy'-mny)\,dy']. \end{aligned}$$

Or, à cause de

$$(n+1)(m+1)y'^2\,dx + (xy'-mny)\,dy' = (m+1)(y')^{s+1}\,dv,$$

nous pouvons écrire l'intégrale trouvée sous la forme

$$\text{const.} = \frac{(y')^k (xy'+my)^{l+1}}{l+1} - \frac{m+1}{n+1} \cdot \int (y')^{k+s} (xy'+my)^l . \, dv,$$

ou, en vertu de la dernière des formules (175),

$$\text{const.} = \frac{(y')^k(xy'+my)^{l+1}}{l+1} - \frac{m+1}{n+1}\cdot\int\left(\frac{xy'+my}{(y')^r}\right)^l dv.$$

En posant

$$\int [f(v)]^l . dv = F(v),$$

et en observant que

$$\frac{n+1}{l+1} = \frac{p}{r-s},$$

nous aurons enfin

$$(176)\qquad \frac{p}{r-s}\cdot(y')^k(xy'+my)^{l+1} - (m+1).F\left(\frac{xy'+my}{(y')^{\frac{m}{m+1}}}\right) = \text{cont.},$$

les valeurs de p, q et l étant données par les relations (175).

En éliminant y' entre cette formule et l'équation différentielle proposée, nous aurons l'intégrale générale de celle-ci.

IV^e cas : $r(n+1) - n = 0$. Dans ce cas on aura

$$(177)\qquad \begin{cases} p = m - s(m+1), \\ q = -np, \\ k = -\dfrac{m(r-s)}{p}, \\ l = \dfrac{r(m+1)-m}{p}, \\ k + r + ls = 0, \end{cases}$$

et l'intégrale cherchée

$$\begin{aligned} \text{const.} &= \int (y')^k(xy'+ny)^l\{d(xy'+ny) - [(n+1)y'dx + xdy']\} \\ &= \frac{(y')^k(xy'+ny)^{l+1}}{l+1} - \frac{1}{m+1}\cdot\int (y')^{k-1}(xy'+ny)^l \\ &\qquad\qquad \times [(m+1)(n+1)y'^2dx + (xy'-mny)dy'], \end{aligned}$$

ce que nous pouvons écrire sous la forme

$$\text{const.} = \frac{(y')^k (xy' + ny)^{l+1}}{l+1} - \frac{n+1}{m+1} \cdot \int \left(\frac{xy' + ny}{(y')^s}\right)^l du,$$

à cause de

$$(m+1)(n+1) \cdot y'^2 \, dx + (xy' - mny) dy' = (n+1)(y')^{r+1} \cdot du.$$

D'ailleurs il suit de l'équation (165)

$$du = f'(v) \cdot dv.$$

En posant donc

$$\int (v)^l \cdot f'(v) \cdot dv = F(v),$$

et en observant que

$$\frac{m+1}{l+1} = \frac{p}{r-s},$$

nous aurons enfin

$$(178) \qquad \frac{p}{r-s} \cdot (y')^k (xy' + ny)^{l+1} - (n+1) \cdot F\left(\frac{xy' + ny}{(y')^s}\right) = \text{const.},$$

les valeurs de p, k et l étant données par les équations (177).

L'élimination de (y') entre cette formule et l'équation différentielle proposée nous en donnera l'intégrale générale.

Observation I. — Si l'on a en même temps

$$r(n+1) - n = 0 \quad \text{et} \quad s(m+1) - m = 0,$$

les formules (176) et (178) deviennent en défaut. Mais alors il n'y a aucune difficulté de trouver l'intégrale de

$$(178\ bis) \qquad u = f(v),$$

où, dans ce cas,

$$u = \frac{xy' + my}{(y')^{\frac{n}{n+1}}}, \qquad v = \frac{xy' + ny}{(y')^{\frac{m}{m+1}}},$$

et partant

$$(n+1)(y')^{\frac{1}{n+1}}.\,du=(m+1)(y')^{\frac{1}{m+1}}dv.$$

En effet, en différentiant l'équation (178 *bis*) on aura l'équation

$$dv.\left[(m+1).(y')^{\frac{1}{m+1}}-(n+1)(y')^{\frac{1}{n+1}}.f'(v)\right]=0,$$

qui est satisfaite en posant

$$dv=0,$$

ce qui donnera

$$v=\frac{xy'+ny}{(y')^{\frac{m}{m+1}}}=c,$$

c étant une constante arbitraire. En éliminant y' entre cette formule et

$$\frac{xy'+my}{(y')^{\frac{n}{n+1}}}=f(c),$$

on aura l'intégrale générale proposée.

Si l'on avait supposé

$$(m+1)(y')^{\frac{1}{m+1}}-(n+1)(y')^{\frac{1}{n+1}}.f'(v)=0,$$

on aurait eu (en général) une solution singulière.

§ XXXII.

EXEMPLE XIV.

Trouver l'intégrale générale de l'équation différentielle

$$(179)\qquad xy'^2+ayy'+bx=f(y').$$

En différentiant l'équation proposée, qui peut être écrite de cette manière,

$$\varphi = f(y') - xy'^2 - ayy' - bx = 0, \tag{180}$$

on aura

$$f'(y') - 2xy' - ay = \frac{b+(1+a)y'^2}{y''}.$$

Or, pour trouver à l'aide du théorème IX le facteur propre à l'intégration, différentions l'équation (180) par rapport à y et y'; on obtiendra

$$\frac{d\varphi}{dy} = -ay',$$

$$\frac{d\varphi}{dy'} = f'(y') - 2xy' - ay = \frac{b+(1+a)y'^2}{y''},$$

d'où il vient

$$\frac{d\varphi}{dy} : \frac{d\varphi}{dy'} = -\frac{a}{2(1+a)} \cdot \frac{2(1+a)y' \cdot y''}{b+(1+a) \cdot y'^2},$$

et, en vertu de l'équation (96), le facteur cherché devient

$$\mathfrak{M} = [b + (1+a)y'^2]^{-\frac{a}{2(1+a)}}.$$

L'intégrale dont il s'agit devient donc

$$\begin{aligned} \text{const.} &= \int [b+(1+a)y'^2]^{-\frac{a}{2(1+a)}} (dy - y'\,dx) \\ &= [b+(1+a)y'^2]^{-\frac{a}{2(1+a)}} \cdot (y - xy') \\ &\quad + \int [b+(1+a)y'^2]^{-\frac{a}{2(1+a)}-1} \cdot f(y')\,dy', \end{aligned}$$

ou, ce qui revient au même,

$$[b+(1+a)y']^{-\frac{a}{2(1+a)}} \cdot (y - xy') + F(y') = \text{const.}, \tag{181}$$

en posant, pour abréger,

$$\int [b + (1 + a)\, y'^{2}]^{-\frac{a}{2(1+a)}-1} . f(y')\, dy' = F(y').$$

L'élimination de y' entre les formules (179) et (181) donnera enfin l'intégrale générale de celle-ci.

Observation I. — Pour $a + 1 = 0$, l'équation proposée devient

$$xy'^{2} - xy' + bx = f(y'),$$

dont on aura l'intégrale générale

$$b(y - xy')\, e^{\frac{y'^{2}}{2b}} + \int e^{\frac{y'^{2}}{2b}} f(y').\, dy' = \text{const.},$$

en observant que pour $a = -1$

$$\lim \left(1 + \frac{(a+1)\, y'^{2}}{b}\right)^{-\frac{a}{2(a+1)}} = e^{\frac{y'^{2}}{2b}}.$$

Observation II. — Si l'on a en même temps

$$a + 1 = 0 \quad \text{et} \quad b = 0,$$

la formule (181) devient en défaut. Mais dans ce cas l'équation proposée se réduira immédiatement à la forme de Clairaut.

§ XXXIII.

EXEMPLE XV.

Trouver l'intégrale générale de l'équation différentielle

$$y . f_1(y') = f\left(x - \frac{y}{y'}\right). \tag{182}$$

On voit facilement qu'en cherchant, à l'aide du théorème X, le facteur propre à l'intégration, on aura ici

$$\varphi = f\left(x - \frac{y}{y'}\right) - y . f_1(y').$$

En différentiant, on obtiendra

$$f'\left(x - \frac{y}{y'}\right) = \frac{y'^2}{yy''}[y' . f_1(y') + yy'' . f'_1(y')],$$

et de plus

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{y'^2}{yy''}[y' . f_1(y') + yy'' . f'_1(y')],$$

$$\frac{d\varphi}{d\left(\frac{1}{y'}\right)} = -\frac{y'^3 . f_1(y')}{y''},$$

d'où l'on aura

$$\frac{d\varphi}{dx} : \frac{d\varphi}{d\left(\frac{1}{y'}\right)} = -\frac{1}{y} - \frac{d . f_1(y')}{f_1(y')\,dy},$$

et en vertu de l'équation (99) le facteur cherché

$$\mathfrak{M}_1 = \frac{1}{y . f_1(y')}.$$

L'intégrale dont il s'agit devient donc

$$\text{const.} = \int \frac{dy - y'\,dx}{y . y'\ f_1(y')} = \int \frac{dy'}{y'^2 . f_1(y')} - \int \frac{d\left(x - \frac{y}{y'}\right)}{y . f_1(y')},$$

c'est-à-dire, en vertu de l'équation (182),

$$(183) \qquad F\left(x - \frac{y}{y'}\right) - \int \frac{dy'}{y'^2 . f_1(y')} = \text{const.},$$

en posant, pour abréger,

$$\int \frac{dz}{f(z)} = F(z).$$

En éliminant y' entre les équations (182) et (183), on aura l'intégrale générale de l'équation (182).

Observation I. — En posant

$$z = x - \frac{y}{y'},$$

d'où il suit

$$dz = \frac{y\,dy'}{y'^2},$$

on aura, à l'aide de l'équation (182),

$$\frac{dz}{f(z)} - \frac{dy'}{y'^2 . f_1(y')} = 0,$$

ce qui donne immédiatement la formule (183).

§ XXXIV.

EXEMPLE XVI.

Trouver l'intégrale générale de l'équation différentielle

$$f_1(y'^2 + 2by + a) = y' f(y' + bx). \tag{184}$$

En posant

$$u = y'^2 + 2by + a,$$
$$z = y' + bx,$$

d'où il suit

$$\left\{ \begin{aligned} du &= 2y'\,dz, \\ dz &= (y'' + b)\,dx, \end{aligned} \right. \tag{185}$$

l'équation proposée peut être présentée sous cette forme

$$\varphi = y'.f(z) - f_1(u) = 0.$$

En différentiant on obtiendra

$$y'.f'(z) = -\frac{f_1(u).dy'}{y'.dz} + 2y'.f'_1(u) = -2\left[\frac{f_1(u)\,dy'}{du} - y'.f'_1(u)\right],$$

$$\frac{d\varphi}{dx} = -2b\left[\frac{f_1(u)\,dy'}{du} - y'.f'_1(u)\right],$$

$$\frac{d\varphi}{d\left(\frac{1}{y'}\right)} = -y'^2\cdot\frac{d\varphi}{dy'} = -\frac{2b.y'.f_1(u)\,dy}{du},$$

d'où l'on aura

$$\frac{d\varphi}{dx} : \frac{d\varphi}{d\left(\frac{1}{y'}\right)} = \frac{1}{dy}\left[\frac{dy'}{y'} - \frac{d.f_1(u)}{f_1(u)}\right],$$

et en vertu de l'équation (99) le facteur cherché

$$\mathfrak{M}_1 = \frac{y'}{f_1(u)}.$$

L'intégrale dont il s'agit devient donc

$$\text{const.} = \int \frac{dy - y'dx}{f_1(u)} = \int \frac{du}{f_1(u)} - 2\int \frac{y'\,dz}{f_1(u)}.$$

D'ailleurs en vertu de l'équation (184) on aura

$$(185\ bis) \qquad \frac{y'}{f_1(u)} = \frac{1}{f(z)},$$

d'où, en posant, pour abréger,

$$\int \frac{du}{f_1(u)} = F_1(u), \qquad \int \frac{dz}{f(z)} = F(z),$$

on aura enfin

$$(186) \qquad F_1(y'^2 + 2by + a) - 2F(y' + bx) = \text{const}.$$

L'élimination de y' entre cette formule et l'équation proposée (184) donnera l'intégrale générale de celle-ci.

Observation I. — En multipliant la première des équations (185) par l'équation (185 *bis*), on obtiendra immédiatement la formule (186).

§ XXXV.

EXEMPLE XVII.

Trouver l'intégrale générale de l'équation différentielle

$$(187)\qquad y'^2 + axy' - ay = y'.f\left(\frac{y'^2+ay}{y'^r}\right).$$

Faisons, pour abréger,

$$u = \frac{y'^2 + ay}{(y')^r},$$

d'où l'on aura

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{ay'^2 + [(2-r)y'^2 - ary]y''}{(y')^{r+1}},$$

$$\frac{du}{\mathrm{d}y'} = \frac{(2-r)y'^2 - ary}{(y')^{r+1}}.$$

En différentiant l'équation (187), qu'on pourra écrire de cette manière

$$(187\ bis)\qquad f(u) - y' + a\cdot\frac{y}{y'} - ax = 0,$$

on aura

$$(188)\qquad f'(u) = \frac{(y'^2+ay).y''}{(y')^{1-r}.\{ay'^2 + [(2-r)y'^2 - ary]y''\}}.$$

Pour trouver, à l'aide du théorème X, le facteur propre à l'intégration, nous observons qu'on a ici

$$\varphi = f(u) - y' + a\cdot\frac{y}{y'} - ax,$$

d'où, à l'aide de l'équation (188),

$$\frac{d\varphi}{\mathrm{d}x} = -a,$$

$$\frac{d\varphi}{\mathrm{d}\left(\frac{1}{y'}\right)} = \frac{ay'^2(ay+y'^2)}{ay'^2 + [(2-r)y'^2 - axy].y''}.$$

On en conclura

$$\frac{d\varphi}{dx}:\frac{d\varphi}{d\left(\frac{1}{y'}\right)}=-\frac{ay'^2+[(2-r)y'^2-ary]y''}{y'^2(ay+y'^2)}=\frac{r.d\log y'}{dy}-\frac{d\log(ay+y'^2)}{dy}.$$

et partant, en vertu de l'équation (96), on aura le facteur propre à l'intégration

$$\mathfrak{M}_1=\frac{ay'^r}{ay+y'^2},$$

et l'intégrale cherchée

$$(189)\qquad \text{const.}=\int\frac{(y')^{r-1}.a}{ay+y'^2}(dy-y'dx).$$

D'ailleurs on obtiendra par l'équation (187)

$$a(y-xy')=y'^2-y'.f(u),$$

d'où, en différentiant,

$$a(dy-y'dx)=\frac{y'^2+ay}{y'}dy'-y'.f'(u).du,$$

ce qui, substitué dans l'équation (189), donnera

$$\text{const.}=\int(y')^{r-2}.dy'-\int\frac{f'(u)}{u}du,$$

ou, ce qui revient au même,

$$(190)\qquad \frac{(y')^{r-1}}{r-1}-F\left(\frac{y'^2+ay}{(y')^r}\right)=\text{const.},$$

en posant, pour abréger,

$$\int\frac{f'(u)}{u}du=F(u).$$

L'élimination de y' entre l'équation (190) et l'équation différentielle proposée donnera enfin l'intégrale générale de celle-ci.

Observation I. — Si l'on a $r = 1$, il faut remplacer $\frac{(y')^{r-1}}{r-1}$ par $\log y'$.

Observation II. — En posant

$$z = y'^2 + axy' - ay,$$
$$u = \frac{y'^2 + ay}{(y')^r},$$

on obtiendra sans difficulté

$$(190\ bis) \qquad y'\,dz - z\,dy' = y'^r . u\,dy'.$$

En différentiant l'équation (187), on aura

$$\frac{y'dz - z\,dy'}{y'} = y' . f'(u)\,du,$$

et à l'aide de l'équation (190 *bis*)

$$(y')^{r-2}\,dy' - \frac{f'(u)\,du}{u} = 0,$$

ce qui donne immédiatement la formule (190).

§ XXXVI.

EXEMPLE XVIII.

Trouver l'intégrale générale de l'équation différentielle

$$(191) \qquad \frac{ax + by + yy'}{\sqrt{a + by' + y'^2}} = f\left(\frac{xy' - y}{\sqrt{a + by' + y'^2}}\right).$$

Faisons, pour abréger,

$$(192) \qquad m = ax + by + yy',$$

$$(193) \qquad n = xy' - y,$$

$$(194) \qquad r = \sqrt{a + by' + y'^2},$$

d'où il viendra

$$m' = r^2 + yy'',$$
$$n' = xy'',$$
$$r' = \frac{(b+2y')y''}{2r},$$

et de plus

$$(195) \qquad 2m' + bn' = 2r^2 + (bx + 2y)y''.$$

En différentiant l'équation (191) ou, ce qui revient au même,

$$(196) \qquad r \cdot f\left(\frac{n}{r}\right) - m = 0,$$

on trouvera sans difficulté

$$(197) \qquad f'\left(\frac{n}{r}\right) = \frac{2r^4 - (bm + 2an)y''}{y''(2m+bn)}.$$

Allons à présent chercher, à l'aide du théorème IX, le facteur propre à l'intégration; on a ici

$$\varphi = r \cdot f\left(\frac{n}{r}\right) - m,$$

et, par une différentiation partielle,

$$\frac{d\varphi}{dy} = -\left[y' + b + f'\left(\frac{n}{r}\right)\right],$$
$$\frac{d\varphi}{dy'} = \frac{b+2y'}{2r} \cdot f\left(\frac{n}{r}\right) + \frac{(2m+bn)}{2r^2} \cdot f'\left(\frac{n}{r}\right) - y.$$

En substituant ici, à l'aide des formules (196) et (197), les valeurs de $f\left(\frac{n}{r}\right)$ et $f'\left(\frac{n}{r}\right)$, on obtiendra

$$\frac{d\varphi}{dy} = -\frac{2r^4 + y''[(b+y')(2m+bn) - bm - 2an]}{y''(2m+bn)} = -\frac{r^2[2r^2 + y''(bx+2y)]}{y''(2m+bn)},$$
$$\frac{d\varphi}{dy'} = \frac{r^2}{y''},$$

d'où, à l'aide de l'équation (195),

$$\frac{d\varphi}{dy} : \frac{d\varphi}{dy'} = -\frac{2m' + bn'}{2m + bn} = -\frac{d.\log(2m + bn)}{dx}.$$

En vertu de l'équation (96) on aura donc le facteur propre à l'intégration

$$\mathfrak{M} = \frac{1}{2m + bn},$$

et l'intégrale cherchée

$$(198) \qquad \text{const.} = \int \frac{dy - y'\,dx}{2m + bn}.$$

D'ailleurs, à cause de

$$dy - y'\,dx = \frac{(2m + bn)\,dy'}{2r^3} - d\left(\frac{n}{r}\right),$$

on aura

$$(199) \qquad r.\frac{dy - y'\,dx}{2m + bn} = \frac{dy'}{2r^2} - \frac{r\,d\left(\frac{n}{r}\right)}{2m + bn};$$

en ayant de plus de l'équation (196)

$$\frac{2m + bn}{r} = 2.f\left(\frac{n}{r}\right) + \frac{bn}{r},$$

nous conclurons, en vertu des formules (198) et (199),

$$\text{const.} = \int \frac{dy'}{2r^2} - \int \frac{d\left(\frac{n}{r}\right)}{\frac{bn}{r} + 2f\left(\frac{n}{r}\right)},$$

ou, ce qui revient au même,

$$(200) \qquad \frac{1}{2}.\int \frac{dy'}{a + by' + y'^2} - F\left(\frac{xy' - y'}{\sqrt{a + by' + y'^2}}\right) = \text{const.},$$

en posant, pour abréger,

$$\int \frac{dz}{bz + 2f(z)} = F(z).$$

L'élimination de y' entre l'équation (200) et l'équation différentielle proposée donnera enfin l'intégrale générale de celle-ci.

Observation I. — Pour $b = 0$, $a = 1$, la formule (200) rendra l'intégrale déjà trouvée dans l'exemple VI.

§ XXXVII.

EXEMPLE XIX.

Trouver l'intégrale générale de l'équation différentielle

$$\frac{ax + by + yy'}{\sqrt{a + by' + y'^2}} = f(y^2 + bxy + ax^2). \tag{201}$$

Soient m, n et r les mêmes que dans les formules (192), (193) et (194), et faisons

$$t = y^2 + bxy + ax^2,$$

d'où

$$dt = (2y + bx)dy + (by + 2ax)dx. \tag{202}$$

La formule (201), qu'on pourra écrire de cette manière,

$$\frac{m}{r} - f(t) = 0, \tag{203}$$

donne, en la différentiant,

$$f'(t) = \frac{2r^4 - (bm + 2an)y''}{2r^3(2m + bn)}.$$

Pour trouver, à l'aide du théorème IX, le facteur propre à l'intégration, on a ici

$$\varphi = \frac{m}{r} - f(t),$$

d'où, après quelques réductions très-faciles, on conclura

$$\frac{d\varphi}{dy} = \frac{(bm + 2an)[2r^2 + y''(2y + bx)]}{2r^3(2m + bn)}, \qquad \frac{d\varphi}{dy'} = -\frac{bm + 2an}{2r^3},$$

et partant

$$\frac{d\varphi}{dy} : \frac{d\varphi}{dy'} = -\frac{2r^2 + (bx + 2y)y''}{2m + bn} = -\frac{2m' + bn'}{2m + bn}.$$

En vertu de l'équation (96) on aura donc le facteur propre à l'intégration

$$\mathfrak{M} = \frac{1}{2m + bn},$$

et l'intégrale cherchée

$$\text{const.} = \int \frac{dy - y'\,dx}{2m + bn}.$$

Faisons, pour abréger,

$$d\varpi = \frac{dy - y'\,dx}{2m + bn};$$

multiplions cette formule par 2 et retranchons-en

$$\frac{x^2 . d\left(\frac{y}{x}\right)}{t} = \frac{x\,dy - y\,dx}{t},$$

on obtiendra identiquement

$$(204) \qquad 2\,d\varpi - \frac{x^2 . d\left(\frac{y}{x}\right)}{t} = -\frac{n\,dt}{t(2m + bn)} = -\frac{dt}{t\left(b + \frac{2m}{n}\right)}.$$

D'ailleurs on trouvera sans difficulté que

$$m^2 + bmn + an^2 = r^2 t,$$

d'où, à l'aide de l'équation (203), on conclura

$$b + \frac{2m}{n} = \left(\frac{bt}{[f(t)]^2} \pm \sqrt{b^2 - 4a + \frac{4at}{[f(t)]^2}}\right) : \left(\frac{t}{[f(t)]^2} - 1\right)$$

et partant

$$\frac{\mathrm{d}t}{t\left(b+\frac{2m}{n}\right)}=\frac{\{t-[f(t)]^2\}\,\mathrm{d}t}{t\{bt\pm f(t).\sqrt{4at+(b^2-4a).[f(t)]^2}\}},$$

ce qui, substitué dans l'équation (204), donnera en intégrant

$$\text{const.}=\int\frac{\mathrm{d}\left(\frac{y}{x}\right)}{a+b\left(\frac{y}{x}\right)+\left(\frac{y}{x}\right)^2}-\int\frac{\{t-[f(t)^2\}\,\mathrm{d}t}{t\{bt\pm f(t).\sqrt{4at+(b^2-4a).[f(t)]^2}\}}$$

ou, ce qui revient au même,

$$\int\frac{\mathrm{d}\left(\frac{y}{x}\right)}{a+b\left(\frac{y}{x}\right)+\left(\frac{y}{x}\right)^2}-\mathrm{F}(y^2+bxy+ax^2)=\text{const.},\tag{205}$$

en posant

$$\int\frac{\{t-[f(t)]^2\}\,\mathrm{d}t}{t\{bt\pm f(t).\sqrt{4at+(b^2-4a).[f(t)]^2}\}}=\mathrm{F}(t).$$

L'élimination de y' entre l'équation (205) et l'équation différentielle proposée donnera l'intégrale générale de celle-ci.

Observation I. — Pour $a=1$, $b=0$, la formule (205) nous rendra l'intégrale trouvée dans le corollaire de l'exemple V.

§ XXXVIII.

EXEMPLE XX.

Trouver l'intégrale générale de l'équation différentielle

$$\frac{xy'-y}{(y'+\alpha)^{1-r}.(y'+\beta)^r}=f[(y+\alpha x)^r.(y+\beta x)^{1-r}].\tag{206}$$

Faisons, pour abréger,

$$u = (y' + \alpha)^{1-r} . (y' + \beta)^r, \tag{207}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} v = (y + \alpha x)^r . (y + \beta x)^{1-r}, \\ n = xy' - y. \end{array} \right. \tag{208}$$

L'équation (206), qu'on poura écrire de cette manière,

$$\frac{n}{u} - f(v) = 0, \tag{209}$$

donnera, en la différentiant,

$$\frac{d\left(\frac{n}{u}\right)}{dx} = f'(v) . v'. \tag{210}$$

D'ailleurs on conclura des équations (207) et (208)

$$\frac{u'}{u} = \frac{y''(y' + \gamma)}{(y' + \alpha)(y' + \beta)}, \tag{211}$$

$$\frac{v'}{v} = \frac{yy' + \delta xy' + \gamma y + \alpha\beta x}{(y + \alpha x)(y + \beta x)}, \tag{212}$$

en posant

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma = r\alpha + (1 - r)\beta, \\ \delta = r\beta + (1 - r)\alpha. \end{array} \right. \tag{213}$$

En substituant dans l'équation (210) la valeur de v', on obtiendra

$$\frac{d\left(\frac{n}{u}\right)}{dx} = \frac{v . f'(v)(yy' + \delta xy' + \gamma y + \alpha\beta x)}{(y + \alpha x)(y + \beta x)},$$

d'où, la différentiation indiquée étant effectuée, on tirera, à l'aide des équations (211) et (213),

$$v . f'(v) = \frac{y''}{u} . \frac{(y + \alpha x)(y + \beta x)}{(y' + \alpha)(y' + \beta)}. \tag{214}$$

Nous allons à présent chercher, à l'aide du théorème IX, le facteur propre à l'intégration. Nous observons en premier lieu qu'on a ici

$$\varphi = \frac{n}{u} - f(v),$$

d'où, à l'aide de l'équation (214),

$$\frac{d\varphi}{dy} = -\left[\frac{1}{u} + \frac{v.f'(v).(y+\delta x)}{(y+\alpha x)(y+\beta x)}\right] = -\frac{(y'+\alpha)(y'+\beta)+y''(y+\delta x)}{u.(y'+\alpha)(y'+\beta)},$$

$$\frac{d\varphi}{dy'} = \frac{yy'+\delta xy'+\gamma y+\alpha\beta x}{u(y'+\alpha)(y'+\beta)},$$

et partant

$$\frac{d\varphi}{dy}:\frac{d\varphi}{dy'} = -\frac{(y'+\alpha)(y'+\beta)+y''(y+\delta x)}{yy'+\delta xy'+\gamma y+\alpha\beta x},$$

ou, ce qui revient au même,

$$\frac{d\varphi}{dy}:\frac{d\varphi}{dy'} = -\frac{d.\log(yy'+\delta xy'+\gamma y+\alpha\beta x)}{dx},$$

à cause de

$$\alpha+\beta = \gamma+\delta.$$

En vertu de l'équation (96), on aura donc le facteur propre à l'intégration

$$\mathfrak{M} = \frac{1}{yy'+\delta xy'+\gamma y+\alpha\beta x},$$

et l'intégrale cherchée

$$(215) \qquad \text{const.} = \int \frac{dy - y'\,dx}{yy'+\delta xy'+\gamma y+\alpha\beta x}.$$

Or, pour effectuer l'intégration indiquée, qui se réduira nécessairement à des quadratures, faisons, pour abréger,

$$d\mathfrak{T} = \frac{dy - y'\,dx}{yy'+\delta xy'+\gamma y+\alpha\beta x}.$$

La formule (212), multipliée par

$$(y + \beta x)(y' + \alpha)\,dx = (y + \beta x)(dy + \alpha dx),$$

donnera

$$(y' + \alpha)(y + \beta x)\cdot\frac{dv}{v} - \frac{yy' + \delta xy' + \gamma y + \alpha\beta x}{y + \alpha x}\cdot(dy + \alpha dx) = 0,$$

d'où, en ajoutant,

$$0 = dy - y'dx,$$

et en divisant par

$$yy' + \delta xy' + \gamma y + \alpha\beta x,$$

on conclura facilement

$$(216)\qquad d\varpi = \frac{(y' + \alpha)(y + \beta x)}{yy' + \delta xy' + \gamma y + \alpha\beta x}\cdot\frac{dv}{v} - \frac{dy + \alpha dx}{y + \alpha x}.$$

En vertu des équations (215) et (216) on aura donc

$$(217)\qquad \text{const.} = \int \frac{(y' + \alpha)(y + \beta x)}{yy' + \delta xy' + \gamma y + \alpha\beta x}\cdot\frac{dv}{v} - \log(y + \alpha x).$$

D'ailleurs, en ayant en vertu de l'équation (213)

$$yy' + \delta xy' + \gamma y + \alpha\beta x = r(y' + \alpha)(y + \beta x) + (1 - r)(y' + \beta)(y + \alpha x),$$

on pourra écrire la formule (217) de cette manière :

$$(218)\qquad \int \frac{1}{r + (1 - r)w}\cdot\frac{dv}{v} - \log(y + \alpha x) = \text{const.},$$

en posant, pour abréger,

$$(219)\qquad w = \frac{(y' + \beta)(y + \alpha x)}{(y' + \alpha)(y + \beta x)}.$$

Il ne reste à présent qu'à trouver l'expression de w en v. Pour cela nous observons que la formule (219) donnera, en vertu de l'équation (208),

$$w^r = \left(\frac{y'+\beta}{y'+\alpha}\right)^r \cdot \frac{v}{y+\beta x},$$

d'où, à l'aide de l'équation (207), on aura

$$(220) \qquad w^r = \frac{u.v}{(y'+\alpha)(y+\beta x)}.$$

D'ailleurs on obtiendra pareillement de l'équation (219)

$$w - 1 = \frac{(\alpha-\beta).n}{(y'+\alpha)(y+\beta x)},$$

d'où, en divisant par l'équation (220), on aura, à l'aide de l'équation (209),

$$(221) \qquad \frac{w-1}{w^r} = (\alpha-\beta)\cdot\frac{f(v)}{v}.$$

La résolution de cette équation donnera w en fonction de v; donc, en posant

$$\int \frac{1}{r+(1-r)w}\cdot\frac{dv}{v} = F_1(v),$$

l'intégrale cherchée devient, en vertu de l'équation (218),

$$(222) \quad F_1[(y+\alpha x)^r.(y+\beta x)^{1-r}] - \log(y+\alpha x) = \text{const}.$$

Cela étant ainsi, on pourra sans difficulté présenter la même intégrale sous une autre forme. En effet, les formules (208) et (219) nous enseignent qu'en permutant α et β, et en même temps remplaçant r par $1-r$, l'expression v restera la même, et w se changera en $\frac{1}{w}$. En posant donc, pour abréger,

$$\int \frac{w}{r+(1-r)w}\cdot\frac{dv}{v} = F_2(v),$$

on pourra écrire l'intégrale dont il s'agit sous la forme

$$F_2[(y+\alpha x)^r.(y+\beta x)^{1-r}] - \log(y+\beta x) = \text{const}.$$

En retranchant cette formule de l'équation (222), et en observant que

$$\log\left(\frac{y+\beta x}{y+\alpha x}\right)=\int\left(\frac{dy+\beta dx}{y+\beta x}-\frac{dy+\alpha dx}{y+\alpha x}\right)=(\alpha-\beta).\int\frac{d\left(\frac{y}{x}\right)}{\left(\frac{y}{x}+\alpha\right)\left(\frac{y}{x}+\beta\right)},$$

l'intégrale cherchée prendra cette forme plus symétrique

$$(223)\quad F[(y+\alpha x)^r.(y+\beta x)^{1-r}]+(\alpha-\beta).\int\frac{d\left(\frac{y}{x}\right)}{\left(\frac{y}{x}+\alpha\right)\left(\frac{y}{x}+\beta\right)}=\text{const.},$$

ayant posé, pour abréger,

$$(224)\qquad F_1(v)-F_2(v)=\int\frac{1-w}{r+(1-r)w}\cdot\frac{dv}{v}=F(v),$$

w étant donné en fonction de v par la formule (221).

Corollaire. — Pour $r=\frac{1}{2}$, en posant

$$\alpha+\beta=b \quad \text{et} \quad \alpha\beta=a,$$

d'où

$$\alpha-\beta=\sqrt{b^2-4a},$$

on aura par l'équation (208)

$$(225)\qquad v^2=y^2+bxy+ax^2=z,$$

et par l'équation (221)

$$\frac{1-w}{1+w}=\frac{\sqrt{b^2-4a}\;f(\sqrt{z})}{\sqrt{4z+(b^2-4a).[f(\sqrt{z})]^2}}.$$

En mettant $f(z)$ à la place de $f(\sqrt{z})$ et en posant

$$\int\frac{f(z).dz}{z\sqrt{4z+(b^2-4a).[f(z)]^2}}=F(z),$$

nous obtiendrons, en vertu des équations (223) et (224),

$$(226)\qquad F(y^2+bxy+ax^2)+\int\frac{d\left(\frac{y}{x}\right)}{a+b\left(\frac{y}{x}\right)+\left(\frac{y}{x}\right)^2}=\text{const.}$$

comme l'intégrale générale de l'équation différentielle

$$\frac{xy'-y}{\sqrt{a+by'+y'^2}}=f(y^2+bxy+ax^2).$$

Observation. — Pour $b=0$, $a=1$, la formule (226) nous rendra immédiatement l'intégrale trouvée dans l'exemple **V**.