JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

Théorème concernant le produit de deux nombres premiers inégaux de la forme $8\mu + 3$

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 7 (1862), p. 21-22.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1862_2_7__21_0>

THÉORÈME

CONCERNANT

LE PRODUIT DE DEUX NOMBRES PREMIERS INÉGAUX DE LA FORME $8\mu+3$;

PAR M. J. LIOUVILLE.

Soient a et b deux nombres premiers *inégaux* de la forme $8\mu + 3$. Nous aurons au sujet de leur produit m ce théorème, que l'on peut poser au moins une fois (et toujours un nombre impair de fois) l'équation

$$m = 16x^2 + p^{4l+1}y^2,$$

x et y étant des entiers positifs, x pair ou impair à volonté, y naturellement impair; quant à p, c'est un nombre premier (de la forme $8\nu + 1$) qui ne divise pas y : on admet pour l la valeur zéro.

En d'autres termes, si du produit m on retranche tant que faire se peut les entiers exprimés par $16x^2$, savoir

$$16.1^2,\ 16.2^2,\ 16.3^2,\ 16.4^2,\ldots,$$

il y aura un nombre impair de restes susceptibles d'être mis sous la forme

$$p^{4l+1}y^2,$$

p désignant un nombre premier $(8\nu + 1)$ qui ne divise pas y.

Soit, par exemple, $a = 3$, $b = 11$, d'où $m = 33$. On aura

$$33 = 16.1^2 + 17.1^2.$$

Soit ensuite $a = 3$, $b = 19$, d'où $m = 57$. On aura

$$57 = 16.1^2 + 41.1^2.$$

Soit encore $a = 3$, $b = 43$, d'où $m = 129$. Nous aurons de même une seule équation canonique :

$$129 = 16.1^2 + 113.1^2;$$

car le reste 65 obtenu en retranchant 16.2^2 (ou 64) de 129 est le produit de 13 par 5 et n'a pas la forme voulue.

Pour $a = 11$, $b = 19$, c'est-à-dire pour $m = 209$, je ne trouve également que l'équation canonique

$$209 = 16.1^2 + 193.1^2.$$

Mais pour $a = 11$, $b = 43$, c'est-à-dire pour $m = 473$, on en a trois, savoir

$$473 = 16.1^2 + 457.1^2,$$
$$473 = 16.2^2 + 409.1^2,$$
$$473 = 16.5^2 + 73.1^2.$$

Le reste 329 qu'on obtient en retranchant 16.3^2 de 473 est le produit de 7 par 47 et n'a pas la forme demandée. Il en est de même du reste 217 relatif à 16.4^2 et qui est le produit de 7 par 31.

Je ne pousserai pas plus loin ces vérifications numériques.