JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

**Sur la forme $x^2 + y^2 + 2z^2 + 16t^2$**

*Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série*, tome 7 (1862), p. 205-208.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1862_2_7__205_0>

# SUR LA FORME
## $x^2 + y^2 + 2z^2 + 16t^2$;

PAR M. J. LIOUVILLE.

On demande le nombre N des représentations d'un entier donné $n$ (ou $2^\alpha m$, $m$ impair, $\alpha = 0, 1, 2, \ldots$) par la forme

$$x^2 + y^2 + 2z^2 + 16t^2;$$

et cette fois encore nous aurons besoin, tant de la fonction $\omega_1(m)$ définie par les équations

$$m = d\delta, \quad \omega_1(m) = \sum (-1)^{\frac{\delta^2-1}{8}} d,$$

que de la somme

$$\sum (-1)^{\frac{r-1}{2}} r$$

qui se rapporte aux entiers positifs $r$ figurant dans l'équation

$$m = r^2 + 2u^2,$$

où l'entier $u$ est indifféremment positif, nul ou négatif.

Soit d'abord $n$ impair, $n = m$. On aura

$$\mathrm{N} = 2\left[\omega_1(m) + \sum (-1)^{\frac{r-1}{2}} r\right].$$

Cette formule est générale; mais pour les entiers $m$ de l'une des deux formes $8k-3$, $8k-1$, elle se simplifie d'elle-même et se réduit à

$$N = 2\omega_1(m),$$

attendu que l'équation $m = r^2 + 2u^2$ est alors impossible.

Prenons d'abord $m = 1 = 1^2 + 2.0^2$. Notre formule donnera $N = 4$; et cela s'accorde avec les équations

$$1 = (\pm 1)^2 + 0^2 + 2.0^2 + 16.0^2,$$
$$1 = 0^2 + (\pm 1)^2 + 2.0^2 + 16.0^2,$$

qui donnent pour l'entier 1 quatre représentations.

Soit ensuite $m = 3 = 1^2 + 2(\pm 1)^2$. Il nous viendra

$$N = 2(2+2) = 8.$$

Les équations

$$3 = (\pm 1)^2 + 0^2 + 2(\pm 1)^2 + 16.0^2,$$
$$3 = 0^2 + (\pm 1)^2 + 2(\pm 1)^2 + 16.0^2,$$

confirment ce fait.

Faisons à présent $m = 5$. Nous aurons

$$N = 2\omega_1(5) = 8.$$

Cela s'accorde avec les équations

$$5 = (\pm 1)^2 + (\pm 2)^2 + 2.0^2 + 16.0^2,$$
$$5 = (\pm 2)^2 + (\pm 1)^2 + 2.0^2 + 16.0^2.$$

Soit encore $m = 7$. Il nous viendra

$$N = 2\omega_1(7) = 16.$$

Or les équations

$$7 = (\pm 1)^2 + (\pm 2)^2 + 2(\pm 1)^2 + 16.0^2,$$
$$7 = (\pm 2)^2 + (\pm 1)^2 + 2(\pm 1)^2 + 16.0^2,$$

fournissent bien pour l'entier 7 seize représentations.

Pour $m = 9$, comme on a

$$9 = 3^2 + 2.0^2$$

et

$$9 = 1^2 + 2(\pm 2)^2,$$

la valeur de N sera

$$N = 2(7 - 3 + 2) = 12.$$

Cela est confirmé par les équations

$$\begin{aligned}
9 &= (\pm 3)^2 + 0^2 + 2.0^2 + 16.0^2,\\
9 &= 0^2 + (\pm 3)^2 + 2.0^2 + 16.0^2,\\
9 &= (\pm 1)^2 + 0^2 + 2(\pm 2)^2 + 16.0^2,\\
9 &= 0^2 + (\pm 1)^2 + 2(\pm 2)^2 + 16.0^2,
\end{aligned}$$

qui donnent pour l'entier 9 douze représentations.

Pour

$$m = 11, \quad m = 13, \quad m = 15, \quad m = 17, \ldots,$$

notre formule donne respectivement

$$N = 8, \quad N = 24, \quad N = 16, \quad N = 24, \ldots;$$

mais je m'arrête dans ces exercices numériques.

Maintenant supposons $n$ pair, $n = 2^\alpha m$, $\alpha > 0$. L'équation

$$2^\alpha m = x^2 + y^2 + 2z^2 + 16t^2$$

se ramènera alors à celle-ci :

$$2^{\alpha-1} m = X^2 + Y^2 + Z^2 + 8T^2,$$

sans que le nombre des solutions soit changé. Mais cette dernière équation s'est déjà présentée à nous (cahier de septembre 1861). D'après cela, on arrive aisément, pour le nombre N des représentations d'un entier pair $n$, par la forme actuelle

$$x^2 + y^2 + 2z^2 + 16t^2,$$

aux conclusions suivantes.

Pour $n$ impairement pair, $n = 2m$, on a

$$N = 6\omega_1(m)$$

si $m$ est de l'une des deux formes $8k+1$, $8k-3$; mais

$$N = 4\omega_1(m)$$

si $m = 8k+3$, et

$$N = 0$$

si $m = 8k-1$.

Pour $n$ divisible par 4, non par 8, $n = 4m$, on a

$$N = 12\omega_1(m),$$

quelle que soit la forme linéaire de $m$.

Enfin pour $m$ divisible par 8, $n = 2^\alpha m$, $\alpha > 2$, on a

$$N = 2(2^{\alpha-1} - 1)\omega_1(m)$$

si $m = 8k \pm 1$, mais

$$N = 2(2^{\alpha-1} + 1)\omega_1(m)$$

si $m = 8k \pm 3$.