JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

Nouveau théorème concernant les nombres premiers de la forme $16g + 11$

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 7 (1862), p. 17-18.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1862_2_7__17_0>

NOUVEAU THÉORÈME

CONCERNANT

LES NOMBRES PREMIERS DE LA FORME $16g+11$;

PAR M. J. LIOUVILLE.

Nous avons déjà eu occasion de nous occuper des nombres premiers de la forme $16g + 11$. Le théorème nouveau que nous voulons donner à leur sujet consiste en ce que si m désigne un tel nombre, on pourra poser au moins une fois (et toujours un nombre impair de fois) l'équation

$$m = 2^{\alpha+3}x^2 + p^{4l+1}y^2,$$

x et y étant des entiers impairs et p un nombre premier de la forme $8k + 3$ qui ne divise pas y. On admet pour l et pour α la valeur zéro.

Les entiers contenus dans la formule

$$2^{\alpha+3}x^2$$

forment les séries suivantes

$$\begin{array}{lll} 8.1^2, & 8.3^2, & 8.5^2,\ldots, \\ 16.1^2, & 16.3^2, & 16.5^2,\ldots, \\ 32.1^2, & 32.3^2, & 32.5^2,\ldots, \\ \ldots & \ldots & \ldots \end{array}$$

Notre théorème consiste donc en ce que si d'un nombre premier donné m de la forme $16g + 11$, on retranche tant que faire se peut ces divers nombres, il y aura un nombre impair de restes exprimables par le produit

$$p^{4l+1}y^2,$$

p étant un nombre premier $8k + 3$ qui ne divise pas y.

Ainsi on a

$$11 = 8.1^2 + 3.1^2.$$

De même on a pour 43 l'équation canonique

$$43 = 32.1^2 + 11.1^2.$$

L'équation

$$43 = 16.1^2 + 3^3.1^2$$

ne doit pas être comptée ici, parce que l'exposant 3 n'est pas de la forme $4l + 1$.

Il y a également une seule équation canonique pour 59, savoir

$$59 = 16.1^2 + 43.1^2.$$

Mais pour 107 on en a trois :

$$107 = 8.1^2 + 11.3^2,$$
$$107 = 32.1^2 + 3.5^2,$$
$$107 = 64.1^2 + 43.1^2.$$

Enfin pour 139 on en trouve cinq :

$$139 = 8.1^2 + 131.1^2,$$
$$139 = 8.3^2 + 67.1^2,$$
$$139 = 32.1^2 + 107.1^2,$$
$$139 = 64.1^2 + 3.5^2,$$
$$139 = 128.1^2 + 11.1^2.$$

Je ne pousserai pas plus loin ces vérifications.