JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

Sur la forme $x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 16t^2$

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 7 (1862), p. 161-164.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1862_2_7__161_0>

SUR LA FORME

$x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 16t^2$;

PAR M. J. LIOUVILLE.

On demande le nombre N des représentations d'un entier donné n, par la forme

$$x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 16t^2.$$

Nous ferons, comme à l'ordinaire, $n = 2^\alpha m$; puis considérant d'une part la somme $\zeta_1(m)$ des diviseurs de m, et d'autre part la somme

$$\sum (-1)^{\frac{i-1}{2}} i$$

relative aux entiers positifs i qui peuvent figurer dans l'équation

$$m = i^2 + 4s^2,$$

où l'on prend l'entier s (quand il n'est pas nul) avec le double signe $\pm$, j'en tirerai suivant les cas la valeur de N, ainsi qu'on va le voir.

Soit d'abord n impair, $n = m$. On a évidemment $N = 0$ si $m = 8k + 7$. Mais je trouve

$$N = 2\zeta_1(m)$$

si $m = 8k + 3$, et

$$N = \zeta_1(m) + \sum (-1)^{\frac{i-1}{2}} i$$

si $m = 4l + 1$.

Ainsi, pour $m = 3$, on a

$$N = 2\zeta_1(3) = 8:$$

les équations

$$3 = (\pm 1)^2 + 2(\pm 1)^2 + 2.0^2 + 16.0^2$$

et

$$3 = (\pm 1)^2 + 2.0^2 + 2(\pm 1)^2 + 16.0^2$$

confirment ce fait.

Pour $m = 11$, il vient

$$N = 2\zeta_1(11) = 24;$$

et c'est ce que l'on vérifie de même au moyen des équations

$$\begin{aligned} 11 &= (\pm 3)^2 + 2(\pm 1)^2 + 2.0^2 + 16.0^2, \\ 11 &= (\pm 3)^2 + 2.0^2 + 2(\pm 1)^2 + 16.0^2, \\ 11 &= (\pm 1)^2 + 2(\pm 1)^2 + 2(\pm 2)^2 + 16.0^2, \\ 11 &= (\pm 1)^2 + 2(\pm 2)^2 + 2(\pm 1)^2 + 16.0^2. \end{aligned}$$

Pour $m = 19$, je trouve

$$N = 2\zeta_1(19) = 40;$$

or c'est ce qu'on vérifiera au moyen des équations

$$\begin{aligned} 19 &= 1^2 + 2.1^2 + 2.0^2 + 16.1^2, \\ 19 &= 1^2 + 2.3^2 + 2.0^2 + 16.0^2, \\ 19 &= 3^2 + 2.2^2 + 2.1^2 + 16.0^2, \end{aligned}$$

en y affectant du double signe les racines des carrés qui ne sont pas nuls et en opérant les permutations convenables.

Passant aux entiers $4l + 1$, je ferai d'abord

$$m = 1 = 1^2 + 4.0^2,$$

et je trouverai $N = 2$, ce qui est évidemment exact.

Pour $m = 5 = 1^2 + 4(\pm 1)^2$, la formule donne

$$N = 6 + 2 = 8,$$

et en effet l'entier 5 a huit représentations contenues dans l'équation

$$5 = (\pm 1)^2 + 2(\pm 1)^2 + 2(\pm 1)^2 + 16.0^2.$$

Enfin pour $m = 9 = 3^2 + 4.0^2$, on a

$$N = 13 - 3 = 10,$$

et cette valeur est bonne, vu les équations

$$\begin{aligned}
9 &= (\pm 3)^2 + 2.0^2 + 2.0^2 + 16.0^2,\\
9 &= (\pm 1)^2 + 2(\pm 2)^2 + 2.0^2 + 16.0^2,\\
9 &= (\pm 1)^2 + 2.0^2 + 2(\pm 2)^2 + 16.0^2.
\end{aligned}$$

Soit, à présent, n pair, $n = 2^\alpha m$, $\alpha > 0$. L'équation

$$2^\alpha m = x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 16t^2$$

exigeant alors que x soit pair, $x = 2x_1$, revient à celle-ci :

$$2^{\alpha-1} m = y^2 + z^2 + 2x_1^2 + 16t^2,$$

qui a été discutée quelques pages plus haut. De là, pour le nombre N des représentations d'un entier n pair, par la forme actuelle

$$x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 16t^2,$$

les conclusions suivantes.

En prenant n impairement pair, $n = 2m$, on aura

$$N = 2\zeta_1(m)$$

si $m = 4l + 3$; mais

$$N = 2\left[\zeta_1(m) + \sum (-1)^{\frac{i-1}{2}} i\right]$$

si $m = 8k + 1$, et

$$N = 2\left[\zeta_1(m) - \sum (-1)^{\frac{i-1}{2}} i\right]$$

si $m = 8k + 5$.

Pour m divisible par 4, non par 8, $n = 4m$, la forme linéaire de m a aussi de l'influence. On a, dans ce cas,

$$N = 6\zeta_1(m)$$

si $m = 4l + 1$, tandis que

$$N = 2\zeta_1(m)$$

si $m = 4l + 3$.

Mais pour n divisible par 8, non par 16, $n = 8m$, on a toujours

$$N = 12\zeta_1(m),$$

quelle que soit la forme linéaire de m.

Pour n divisible par 16, non par 32, $n = 16m$, il y a de même une seule formule

$$N = 8\zeta_1(m).$$

Enfin pour n divisible par 32, $n = 2^\alpha m$, $\alpha > 4$, on a invariablement

$$N = 24\zeta_1(m),$$

si grand que α puisse devenir.