JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

Sur la forme $x^2 + y^2 + 4z^2 + 16t^2$

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 7 (1862), p. 157-160.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1862_2_7__157_0>

SUR LA FORME

$x^2 + y^2 + 4z^2 + 16t^2$;

PAR M. J. LIOUVILLE.

Étant donné un entier n pair ou impair (que nous représenterons par $2^\alpha m$, m étant impair et l'exposant α pouvant se réduire à zéro), on demande le nombre N des représentations de n par la forme

$$x^2 + y^2 + 4z^2 + 16t^2,$$

c'est-à-dire le nombre N des solutions de l'équation indéterminée

$$n = x^2 + y^2 + 4z^2 + 16t^2,$$

où x, y, z, t sont des entiers positifs, nuls ou négatifs.

Soit d'abord n impair, $n = m$. Il est clair que l'on aura $N = 0$, si $m = 4l + 3$. Mais pour

$$m = 4l + 1,$$

je trouve

$$N = 2\left[\zeta_1(m) + \sum (-1)^{\frac{i-1}{2}} i\right],$$

$\zeta_1(m)$ désignant la somme des diviseurs de m, et

$$\sum (-1)^{\frac{i-1}{2}} i$$

se rapportant aux entiers impairs et positifs i qui peuvent figurer dans l'équation

$$m = i^2 + 4s^2,$$

où l'entier s est indifféremment pair ou impair, positif, nul ou négatif. En effet, comme dans l'équation

$$4l + 1 = x^2 + y^2 + 4z^2 + 16t^2,$$

un quelconque des entiers x, y est pair, l'autre impair, on réduira à moitié le nombre des solutions si l'on exige que y soit pair. Mais alors l'équation à traiter peut s'écrire

$$4l + 1 = x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 16t^2,$$

et l'on a vu (dans le cahier de mars) que le nombre des solutions est

$$\zeta_1(m) + \sum (-1)^{\frac{i-1}{2}} i.$$

De là, pour N, la valeur que nous avons écrite :

$$\mathrm{N} = 2\left[\zeta_1(m) + \sum (-1)^{\frac{i-1}{2}} i\right].$$

Ainsi, pour $m = 1$, on doit avoir $\mathrm{N} = 4$; et cela s'accorde avec les équations

$$1 = (\pm 1)^2 + 0^2 + 4.0^2 + 16.0^2,$$
$$1 = 0^2 + (\pm 1)^2 + 4.0^2 + 16.0^2.$$

Pour $m = 5 = 1^2 + 4(\pm 1)^2$, on trouve

$$\mathrm{N} = 2(6 + 2) = 16.$$

Or les équations

$$5 = (\pm 1)^2 + (\pm 2)^2 + 4.0^2 + 16.0^2,$$
$$5 = (\pm 2)^2 + (\pm 1)^2 + 4.0^2 + 16.0^2,$$
$$5 = (\pm 1)^2 + 0^2 + 4(\pm 1)^2 + 16.0^2,$$
$$5 = 0^2 + (\pm 1)^2 + 4(\pm 1)^2 + 16.0^2,$$

fournissent en effet pour l'entier 5 seize représentations.

Pour $m = 9 = 3^2 + 4.0^2$, notre formule donne

$$N = 2(13 - 3) = 20:$$

or on trouve aisément les vingt représentations qu'elle indique, au moyen des équations

$$9 = 1^2 + 2^2 + 4.1^2 + 16.0^2$$

et

$$9 = 3^2 + 0^2 + 4.0^2 + 16.0^2,$$

en y affectant du double signe $\pm$ les racines des carrés qui ne sont pas nuls, et en opérant les permutations convenables.

Soit enfin $m = 17 = 1 + 4(\pm 2)^2$. Il viendra

$$N = 2(18 + 2) = 40.$$

Voici les équations qui serviront à vérifier ce résultat :

$$\begin{aligned}
17 &= 1^2 + 4^2 + 4.0^2 + 16.0^2,\\
17 &= 1^2 + 0^2 + 4.2^2 + 16.0^2,\\
17 &= 2^2 + 3^2 + 4.1^2 + 16.0^2,\\
17 &= 1^2 + 0^2 + 4.0^2 + 16.1^2.
\end{aligned}$$

Supposons maintenant n pair, $n = 2^\alpha m$, $\alpha > 0$. A l'équation

$$2^\alpha m = x^2 + y^2 + 4z^2 + 16t^2,$$

on pourra, dans ce cas, substituer celle-ci

$$2^{\alpha-1} m = x^2 + y^2 + 2z^2 + 8t^2,$$

sans que le nombre des solutions soit changé. Or cette dernière équation a fait l'objet de l'article précédent. D'après cela, on obtient facilement, pour la détermination du nombre N des représentations d'un entier pair n par la forme

$$x^2 + y^2 + 4z^2 + 16t^2,$$

qui nous occupe ici, les équations suivantes.

Pour n impairement pair, $n = 2m$, on a

$$N = 2\zeta_1(m)$$

si $m = 4l + 3$, mais

$$N = 2\left[\zeta_1(m) + \sum(-1)^{\frac{i-1}{2}} i\right]$$

si $m = 8k + 1$, et

$$N = 2\left[\zeta_1(m) - \sum(-1)^{\frac{i-1}{2}} i\right]$$

si $m = 8k + 5$.

Pour n divisible par 4, non par 8, $n = 4m$, on a

$$N = 6\zeta_1(m)$$

si $m = 4l + 1$, mais

$$N = 2\zeta_1(m)$$

si $m = 4l + 3$.

Ici cesse l'influence de la forme linéaire de m. En effet, pour n divisible par 8, non par 16, $n = 8m$, on a toujours

$$N = 12\zeta_1(m).$$

Pour n divisible par 16, non par 32, $n = 16m$, la formule est

$$N = 8\zeta_1(m).$$

Enfin, pour n divisible par 32, avec quotient pair ou impair, $n = 2^\alpha m$, $\alpha > 4$, on a invariablement

$$N = 24\zeta_1(m),$$

si grand que α puisse devenir.