JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES
FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874
PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

Sur la forme $x^2 + 2y^2 + 8z^2 + 16t^2$

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 7 (1862), p. 153-154.
<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1862_2_7__153_0>

SUR LA FORME

$x^2 + 2y^2 + 8z^2 + 16t^2$;

PAR M. J. LIOUVILLE.

Pour trouver le nombre N des représentations d'un entier donné n (ou $2^\alpha m$, m impair, $\alpha = 0, 1, 2, \ldots$) par la forme

$$x^2 + 2y^2 + 8z^2 + 16t^2,$$

on n'a en quelque sorte à s'occuper que du cas de n impair, $n = m$. Encore est-il évident à priori que $N = 0$ pour les entiers de l'une des deux formes $8k + 5$, $8k + 7$. Mais pour $n = m = 8k + 3$, je trouve

$$N = \zeta_1(m),$$

$\zeta_1(m)$ désignant la somme des diviseurs de m. Pour $n = m = 8k + 1$, la formule (un peu plus compliquée) est

$$N = \zeta_1(m) + \sum (-1)^{\frac{i-1}{2}} i,$$

la somme

$$\sum (-1)^{\frac{i-1}{2}} i$$

se rapportant aux entiers positifs i qui peuvent figurer dans l'équation

$$m = i^2 + 4s^2,$$

où l'entier s est indifféremment positif, nul ou négatif.

Relativement au cas de n pair, $n = 2^\alpha m$, $\alpha > 0$, il suffit d'observer que pour que l'équation

$$2^\alpha m = x^2 + 2y^2 + 8z^2 + 16t^2$$

ait lieu alors, il faut que x soit pair, $x = 2x_1$, de sorte qu'en divisant par 2 il vient

$$2^{\alpha-1}m = y^2 + 2x_1^2 + 4z^2 + 8t^2,$$

équation que nous avons discutée dans le cahier de novembre 1861. De là découlent, pour le nombre N des représentations d'un entier pair n par la forme

$$x^2 + 2y^2 + 8z^2 + 16t^2,$$

les conséquences suivantes.

Pour n impairement pair, $n = 2m$, on a

$$N = \zeta_1(m) + \sum (-1)^{\frac{i-1}{2}} i$$

si $m = 8k + 1$, mais

$$N = \zeta_1(m) - \sum (-1)^{\frac{i-1}{2}} i$$

si $m = 8k + 5$, enfin

$$N = \zeta_1(m)$$

si $m = 8k + 3$ ou $8k + 7$.

Pour n divisible par 4, non par 8, $n = 4m$, on a

$$N = 2\zeta_1(m),$$

quelle que soit la forme linéaire de m.

Pour n divisible par 8, non par 16, $n = 8m$, on a

$$N = 4\zeta_1(m).$$

Pour n divisible par 16, non par 32, $n = 16m$, la formule est

$$N = 8\zeta_1(m).$$

Enfin, pour n divisible par 32, $n = 2^\alpha m$, $\alpha > 4$, il vient invariablement

$$N = 24\zeta_1(m).$$