JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

Sur la forme $x^2 + 2y^2 + 4z^2 + 16t^2$

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 7 (1862), p. 150-152.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1862_2_7__150_0>

SUR LA FORME
$x^2 + 2y^2 + 4z^2 + 16t^2$;

PAR M. J. LIOUVILLE.

On demande le nombre N des représentations d'un entier donné n (ou $2^\alpha m$, m impair, $\alpha = 0, 1, 2, \ldots$) par la forme

$$x^2 + 2y^2 + 4z^2 + 16t^2.$$

Soit d'abord n impair, $n = m$. On aura simplement

$$N = \omega_1(m),$$

si m est de l'une des deux formes $8k - 1$, $8k - 3$, la fonction $\omega_1(m)$ étant définie, comme d'ordinaire, par les équations

$$m = d\delta, \quad \omega_1(m) = \sum (-1)^{\frac{\delta^2 - 1}{8}} d.$$

Mais si m est au contraire de l'une des deux formes $8k + 1$, $8k + 3$, il faut écrire

$$N = \omega_1(m) + \sum (-1)^{\frac{r-1}{2}} r,$$

la somme

$$\sum (-1)^{\frac{r-1}{2}} r$$

se rapportant aux entiers positifs r qui peuvent figurer dans l'équation

$$m = r^2 + 2u^2,$$

où l'entier u, quand il n'est pas nul, doit être pris négativement comme positivement. Au reste, cette dernière formule est générale. car la somme

$$\sum (-1)^{\frac{r-1}{2}} r$$

se réduit d'elle-même à zéro quand m est de l'une des deux formes $8k-1$, $8k-3$.

Ainsi pour $m = 1 = 1^2 + 2.0^2$, on doit avoir $N = 2$, et cela s'accorde avec l'équation

$$1 = (\pm 1)^2 + 2.0^2 + 4.0^2 + 16.0^2$$

qui fournit pour le nombre 1 deux représentations.

Pour $m = 3 = 1^2 + 2(\pm 1)^2$, notre formule donne $N = 4$. Or l'entier 3 a, en effet, quatre représentations contenues dans l'équation ci-après :

$$3 = (\pm 1)^2 + 2(\pm 1)^2 + 4.0^2 + 16.0^2.$$

Pour $m = 5$, on trouve de même $N = 4$. L'équation

$$5 = (\pm 1)^2 + 2.0^2 + 4(\pm 1)^2 + 16.0^2$$

s'accorde avec cette valeur de N.

Enfin pour $m = 7$, on a $N = 8$. Or l'équation

$$7 = (\pm 1)^2 + 2(\pm 1)^2 + 4(\pm 1)^2 + 16.0^2$$

donne, en effet, pour le nombre 7 huit représentations.

Le cas de n pair, $n = 2^\alpha m$, $\alpha > 0$, n'offre aucune difficulté ; car l'équation

$$2^\alpha m = x^2 + 2y^2 + 4z^2 + 16t^2$$

exigeant alors que x soit pair, $x = 2x_1$, se change en celle-ci :

$$2^{\alpha-1} m = y^2 + 2x_1^2 + 2z^2 + 8t^2$$

qui a fait l'objet de l'article précédent. D'après cela, on a pour la détermination du nombre N des représentations d'un entier pair n, par la forme actuelle

$$x^2 + 2y^2 + 4z^2 + 16t^2,$$

les équations suivantes :

Soit, en premier lieu, n impairement pair, $n = 2m$. On a $N = 0$ si m est de la forme $8k - 1$. Mais

$$N = 2\omega_1(m)$$

si m est de l'une des deux formes $8k + 1$, $8k - 3$. Enfin

$$N = 4\omega_1(m)$$

si $m = 8k + 3$.

Soit, en second lieu, n multiple de 4, non de 8, $n = 4m$. On a alors

$$N = 4\omega_1(m),$$

quelle que soit la forme linéaire de m.

Soit enfin n multiple de 8, $n = 2^\alpha m$, $\alpha > 2$. On a

$$N = 2(2^{\alpha-1} - 1)\omega_1(m)$$

si $m = 8k \pm 1$, mais

$$N = 2(2^{\alpha-1} + 1)\omega_1(m)$$

si $m = 8k \pm 3$.