JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

Sur la forme $x^2 + 2y^2 + 16z^2 + 16t^2$

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 7 (1862), p. 145-147.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1862_2_7__145_0>

gallica NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Gallica de la Bibliothèque nationale de France
http://gallica.bnf.fr/

et catalogué par Mathdoc dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc
http://www.numdam.org/journals/JMPA

SUR LA FORME
$x^2 + 2y^2 + 16z^2 + 16t^2$;

PAR M. J. LIOUVILLE.

On demande le nombre N des représentations d'un entier donné n par la forme

$$x^2 + 2y^2 + 16z^2 + 16t^2.$$

Posons, comme d'ordinaire $n = 2^\alpha m$, m étant impair et l'exposant α pouvant se réduire à zéro; puis, considérons d'une part la fonction $\omega_1(m)$ définie (au moyen des diviseurs conjugués d, δ de l'entier impair $m = d\delta$) par la formule

$$\omega_1(m) = \sum (-1)^{\frac{\delta^2-1}{8}} d,$$

et d'autre part la somme

$$\sum (-1)^{\frac{r-1}{2}} r,$$

relative aux entiers positifs r qui peuvent figurer dans l'équation

$$m = r^2 + 2u^2,$$

où l'entier u est indifféremment positif, nul ou négatif. De là nous tirerons la valeur de N propre aux divers cas qui s'offriront successivement.

Soit d'abord n impair, $n = m$. Nous aurons évidemment $N = 0$ si m est de l'une des deux formes $8k - 1$, $8k - 3$. Mais

$$N = \omega_1(m) + \sum (-1)^{\frac{r-1}{2}} r,$$

si m est au contraire de l'une des deux formes $8k + 1$, $8k + 3$.

Ainsi, pour $m = 1 = 1^2 + 2.0^2$, on doit avoir $N = 2$, et cela s'accorde avec l'équation

$$1 = (\pm 1)^2 + 2.0^2 + 16.0^2 + 16.0^2,$$

qui donne pour l'entier 1 deux représentations. De même, pour

$$m = 3 = 1^2 + 2(\pm 1)^2,$$

on doit avoir $N = 2 + 2 = 4$: l'équation

$$3 = (\pm 1)^2 + 2(\pm 1)^2 + 16.0^2 + 16.0^2$$

confirme ce fait.

Pour $m = 9$, comme on a

$$9 = 1^2 + 2(\pm 2)^2$$

et

$$9 = 3^2 + 2.0^2,$$

notre formule donne $N = 6$. Or l'entier 9 a, en effet, six représentations contenues dans les équations ci-après :

$$9 = (\pm 1)^2 + 2(\pm 1)^2 + 16.0^2 + 16.0^2,$$
$$9 = (\pm 3)^2 + 2.0^2 + 16.0^2 + 16.0^2.$$

Enfin, pour $m = 17 = 3^2 + 2(\pm 2)^2$, il nous vient $N = 12$; et l'entier 17 possède bien douze représentations, en vertu des équations que voici :

$$17 = (\pm 3)^2 + 2(\pm 2)^2 + 16.0^2 + 16.0^2,$$
$$17 = (\pm 1)^2 + 2.0^2 + 16(\pm 1)^2 + 16.0^2,$$
$$17 = (\pm 1)^2 + 2.0^2 + 16.0^2 + 16(\pm 1)^2.$$

Soit, à présent, n pair, $n = 2^\alpha m$, $\alpha > 0$. L'équation

$$2^\alpha m = x^2 + 2y^2 + 16z^2 + 16t^2$$

ne pouvant alors avoir lieu qu'avec x pair, $x = 2x_1$, revient à à celle-ci :

$$2^{\alpha-1}m = y^2 + 2x_1^2 + 8z^2 + 8t^2,$$

que nous avons discutée dans le cahier de février. Il résulte de là, pour la détermination du nombre N des représentations d'un entier pair n par la forme actuelle

$$x^2 + 2y^2 + 16z^2 + 16t^2,$$

les formules suivantes :

Pour n impairement pair, $n = 2m$, on aura $N = 0$ si m est de l'une des deux formes $8k - 1$, $8k - 3$. Mais

$$N = 2\omega_1(m)$$

si m est au contraire de l'une des deux formes $8k + 1$, $8k + 3$.

Pour n divisible par 4, non par 8, $n = 4m$, on a

$$N = 2\omega_1(m),$$

quelle que soit la forme linéaire de m.

Enfin pour n divisible par 8, $n = 2^\alpha m$, $\alpha > 2$, on a

$$N = 2(2^{\alpha-2} - 1)\omega_1(m),$$

si $m = 8k \pm 1$, mais

$$N = 2(2^{\alpha-2} + 1)\omega_1(m),$$

si $m = 8k \pm 3$.