JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

Sur la forme $x^2 + 4y^2 + 8z^2 + 16t^2$

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 7 (1862), p. 143-144.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1862_2_7__143_0>

SUR LA FORME

$x^2+4y^2+8z^2+16t^2$;

PAR M. J. LIOUVILLE.

On demande le nombre N des représentations d'un entier donné n ou $2^\alpha m$ (m impair, $\alpha = 0, 1, 2, 3, \ldots$) par la forme

$$x^2+4y^2+8z^2+16t^2.$$

Entrons dans le détail des divers cas qui peuvent se présenter.

1° Soit n impair, $n = m$. On a évidemment $N = 0$, si $m = 4l+3$. Le cas de $m = 4l+1$ se décompose en deux autres.

Pour $m = 8\mu+5$, je trouve

$$N = \omega_1(m),$$

la fonction $\omega_1(m)$ étant celle que nous avons déjà très-souvent rencontrée et que nous définissons (au moyen des diviseurs conjugués d, δ de l'entier impair $m = d\delta$) par l'équation

$$\omega_1(m) = \sum (-1)^{\frac{\delta^2-1}{8}} d.$$

Pour $m = 8\mu+1$, la valeur de N est plus compliquée. On a en effet alors

$$N = \omega_1(m) + \sum (-1)^{\frac{r-1}{2}} r,$$

la somme

$$\sum (-1)^{\frac{r-1}{2}} r$$

se rapportant aux entiers impairs et positifs r qui peuvent figurer dans l'équation

$$m = r^2 + 2u^2,$$

où l'entier u (qui sera pair ici à cause de $m = 8k + 1$) doit, quand il n'est pas nul, être affecté successivement du signe $+$ et du signe $-$.

2° Soit, en second lieu, n impairement pair, $n = 2m$. Il est clair que, dans ce cas, $N = 0$.

3° Soit ensuite n divisible par 4, mais non par 8, $n = 4m$. La formule est alors

$$N = 4\omega_1(m),$$

quel que soit l'entier impair m.

4° Mais pour n divisible par 8, avec quotient pair ou impair, $n = 2^\alpha m$, $\alpha > 2$, la forme linéaire de m prend de l'influence. On a

$$N = 2(2^{\alpha-1} - 1)\omega_1(m)$$

si $m = 8k \pm 1$, mais

$$N = 2(2^{\alpha-1} + 1)\omega_1(m)$$

si $m = 8k \pm 3$.

Je ne m'arrêterai pas à la recherche du nombre M des solutions propres.