JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

Sur la forme $X^2 + 8Y^2 + 8Z^2 + 16T^2$

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 7 (1862), p. 13-16.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1862_2_7__13_0>

gallica NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Gallica de la Bibliothèque nationale de France
http://gallica.bnf.fr/

et catalogué par Mathdoc dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc
http://www.numdam.org/journals/JMPA

SUR LA FORME
$X^2 + 8Y^2 + 8Z^2 + 16T^2$;

PAR M. J. LIOUVILLE.

1. Étant donné un entier n pair ou impair (que nous représenterons par $2^\alpha m$, m étant impair et l'exposant α pouvant se réduire à zéro), on demande le nombre N des représentations de n par la forme

$$X^2 + 8Y^2 + 8Z^2 + 16T^2,$$

c'est-à-dire le nombre N des solutions de l'équation

$$n = 2^\alpha m = X^2 + 8Y^2 + 8Z^2 + 16T^2,$$

où X, Y, Z, T sont des entiers positifs, nuls ou négatifs. Or il est évident que l'on a

$$N = 0$$

quand n est un entier impair de l'une des trois formes $8k+3$, $8k+5$, $8k+7$, et aussi quand n est impairement pair, $n = 2m$. Ces cas exclus, on a $N > 0$, et la valeur précise de N se conclut facilement de ce que nous avons dit (dans le cahier de novembre 1861) au sujet de la forme

$$x^2 + 2y^2 + 4z^2 + 8t^2,$$

et aussi de ce qu'on trouve en tête du présent cahier concernant la forme

$$X^2 + 2Y^2 + 2Z^2 + 4T^2.$$

Les fonctions numériques à employer seront donc d'une part la somme $\zeta_1(m)$ des diviseurs de m, et d'autre part la somme

$$\sum (-1)^{\frac{i-1}{2}} i,$$

où le signe sommatoire porte successivement sur tous les entiers impairs et positifs i qui peuvent figurer dans l'équation

$$m = i^2 + 4s^2,$$

l'entier s étant indifféremment pair ou impair, positif, nul ou négatif.

2. Soit d'abord n impair, $n = m = 8k + 1$, les autres formes linéaires de m ayant été exclues. Je remarquerai que l'équation

$$m = 8k + 1 = X^2 + 8Y^2 + 8Z^2 + 16T^2$$

ne diffère pas au fond de celle-ci

$$m = 8k + 1 = X^2 + 2U^2 + 4V^2 + 8Z^2,$$

attendu que U et V ne pouvant être que pairs d'après la forme linéaire de m, rien n'empêche de prendre

$$U = 2Y, \qquad V = 2T.$$

Mais le nombre des solutions de l'équation

$$m = 8k + 1 = X^2 + 2U^2 + 4V^2 + 8Z^2$$

s'exprime par

$$\zeta_1(m) + \sum (-1)^{\frac{i-1}{2}} i.$$

Pour le nombre N des solutions de notre équation

$$m = 8k + 1 = X^2 + 8Y^2 + 8Z^2 + 16T^2,$$

on a donc également

$$N = \zeta_1(m) + \sum (-1)^{\frac{i-1}{2}} i.$$

Je ne crois pas qu'il soit nécessaire d'ajouter des exemples.

5. Passons aux entiers divisibles par 4, et faisons en conséquence $\alpha = 2 + \beta$, β étant nul ou positif. L'équation à traiter sera

$$4.2^\beta m = X^2 + 8Y^2 + 8Z^2 + 16T^2.$$

Or X y est nécessairement pair, $X = 2U$. L'équation dont il s'agit revient donc à celle-ci

$$2^\beta m = U^2 + 2Y^2 + 2Z^2 + 4T^2,$$

dont nous nous sommes occupés plus haut (page 1).

La détermination du nombre N des solutions de notre équation

$$n = X^2 + 8X^2 + 8Z^2 + 16T^2$$

étant ainsi réduite (dans l'hypothèse de n multiple de 4) à une question déjà discutée, nous n'avons plus qu'à transcrire les résultats propres aux divers cas.

Pour n divisible par 4, non par 8, $n = 4m$, on trouve

$$N = 2\zeta_1(m).$$

Pour n divisible par 8, non par 16, $n = 8m$, il vient

$$N = 4\zeta_1(m).$$

Pour n divisible par 16, non par 32, la formule est

$$N = 8\zeta_1(m).$$

Enfin pour n divisible par 32, quel que soit le quotient pair ou impair, on a toujours

$$N = 24\zeta_1(m).$$

La fonction numérique

$$\sum(-1)^{\frac{i-1}{2}} i$$

ne se présente, comme on voit, dans l'expression de N que quand il s'agit d'un nombre impair $8k+1$. Partout ailleurs on n'a besoin que de la fonction $\zeta_1(m)$, comme s'il ne s'agissait que de la forme

$$x^2 + y^2 + z^2 + t^2,$$

considérée par Jacobi.

Je viens de déterminer le nombre *total* N des représentations propres ou impropres de n par la forme

$$X^2 + 8Y^2 + 8Z^2 + 16T^2.$$

On pourrait aussi désirer de connaître à part le nombre M des représentations *propres*, c'est-à-dire le nombre des représentations où les indéterminées X, Y, Z, T n'ont pour plus grand commun diviseur que l'unité. Mais je ne m'arrêterai pas à la solution de cette seconde question qui se rattache toujours à la première. Il y a du reste, à ce sujet, une méthode générale qui s'offre d'elle-même, et nous n'avons aucun détail particulier digne d'intérêt à y ajouter à l'occasion de la forme qui nous occupe.