

JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

A. CAYLEY

Note sur les fonctions $al(x)$, etc., de M. Weierstrass

Journal de mathématiques pures et appliquées 2^e série, tome 7 (1862), p. 137-142.

http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1862_2_7__137_0

 gallica

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Gallica de la Bibliothèque nationale de France
<http://gallica.bnf.fr/>

et catalogué par Mathdoc
dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc
<http://www.numdam.org/journals/JMPA>

NOTE

SUR

LES FONCTIONS $\text{al}(x)$, etc., DE M. WEIERSTRASS;

PAR M. A. CAYLEY.

Les fonctions $\text{al}(x)$, $\text{al}(x)_1$, $\text{al}(x)_2$, $\text{al}(x)_3$ de M. Weierstrass satisfont respectivement aux équations

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \text{al}(x)}{dx^2} + 2k^2 x \frac{d \text{al}(x)}{dx} + 2kk'^2 \frac{d \text{al}(x)}{dk} + k^2 x^2 \text{al}(x) &= 0, \\ \frac{d^2 \text{al}(x)_1}{dx^2} + 2k^2 x \frac{d \text{al}(x)_1}{dx} + 2kk'^2 \frac{d \text{al}(x)_1}{dk} + (k'^2 + k^2 x^2) \text{al}(x)_1 &= 0, \\ \frac{d^2 \text{al}(x)_2}{dx^2} + 2k^2 x \frac{d \text{al}(x)_2}{dx} + 2kk'^2 \frac{d \text{al}(x)_2}{dk} + (1 + k^2 x^2) \text{al}(x)_2 &= 0, \\ \frac{d^2 \text{al}(x)_3}{dx^2} + 2k^2 x \frac{d \text{al}(x)_3}{dx} + 2kk'^2 \frac{d \text{al}(x)_3}{dk} + (k^2 + k^2 x^2) \text{al}(x)_3 &= 0, \end{aligned}$$

ou, ce qui est la même chose, les fonctions

$$\text{al}(x), \quad \sqrt{k} \text{al}(x)_1, \quad \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{k'}} \text{al}(x)_2, \quad \frac{1}{\sqrt{k'}} \text{al}(x)_3,$$

satisfont chacune à l'équation

$$\frac{d^2 z}{dx^2} + 2k^2 x \frac{dz}{dx} + 2kk'^2 \frac{dz}{dk} + k^2 x^2 z = 0.$$

Écrivons pour un moment ξ , \varkappa au lieu de x , k ; les fonctions $\text{al}(\xi)$, etc., satisfont à l'équation

$$\frac{d^2 z}{d\xi^2} + 2\varkappa^2 \xi \frac{dz}{d\xi} + 2\varkappa\varkappa'^2 \frac{dz}{d\varkappa} + \varkappa^2 \xi^2 z = 0.$$

Cela étant, en posant

$$\xi = \frac{x}{\sqrt{k}}, \quad x = k,$$

on obtient

$$\frac{dz}{dx} = \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{dz}{d\xi}, \quad \frac{d^2z}{dx^2} = \frac{1}{k} \frac{d^2z}{d\xi^2}, \quad \frac{dz}{dk} = -\frac{x}{2k\sqrt{k}} \frac{dz}{d\xi} + \frac{dz}{dx},$$

et de là

$$\frac{dz}{d\xi} = \sqrt{k} \frac{dz}{dx}, \quad \frac{d^2z}{d\xi^2} = k \frac{d^2z}{dx^2}, \quad \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dk} + \frac{x}{2k} \frac{dz}{dx}.$$

L'équation différentielle devient ainsi

$$k \frac{d^2z}{dx^2} + 2k^2 x \frac{dz}{dx} + 2kk'^2 \left(\frac{dz}{dk} + \frac{x}{2k} \frac{dz}{dx} \right) + kx^2 z = 0,$$

c'est-à-dire

$$\frac{d^2z}{dx^2} + \frac{1+k^2}{k} x \frac{dz}{dx} + 2k'^2 \frac{dz}{dk} + x^2 z = 0,$$

équation qui sera ainsi satisfaite par

$$\text{al} \left(\frac{x}{\sqrt{k}} \right), \quad \sqrt{k} \text{al} \left(\frac{x}{\sqrt{k}} \right)_1, \quad \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{k'}} \text{al} \left(\frac{x}{\sqrt{k}} \right)_2, \quad \frac{1}{\sqrt{k'}} \text{al} \left(\frac{x}{\sqrt{k}} \right)_3.$$

Or en écrivant

$$k + \frac{1}{k} = \alpha,$$

l'équation en z devient

$$(1) \quad \frac{d^2z}{dx^2} + 2\alpha x \frac{dz}{dx} - 2(\alpha^2 - 4) \frac{dz}{d\alpha} + x^2 z = 0,$$

laquelle est ce que devient celle-ci

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} (1 - \alpha x^2 + x^4) \frac{d^2z}{dx^2} + (n-1)(\alpha x - 2x^3) \frac{dz}{dx} - 2n(\alpha^2 - 4) \frac{dz}{d\alpha} \\ + n(n-1)x^2 z = 0, \end{array} \right.$$

en y écrivant $\frac{x}{\sqrt{n}}$ au lieu de x , et puis $n = \infty$. L'équation (2), trouvée par Jacobi (*Journal de Crelle*, t. IV, p. 185; 1829), a la propriété que voici, savoir en posant

$$a = k + \frac{1}{k}, \quad x = \sqrt{k} \sin am u,$$

alors l'équation est satisfaite en prenant pour z soit le numérateur, soit le dénominateur, de la fonction rationnelle de x qui donne la valeur de la fonction $\sqrt{\lambda} \sin am \left(\frac{u}{M}, \lambda \right)$, où λ , M sont le module et le multiplicateur qui correspondent à la transformation de l'ordre n (n étant un nombre impair quelconque).

L'équation fut donnée par Jacobi sans démonstration. Je l'ai démontrée (*Camb. and Dub. Math. Journal*, t. II, p. 256; 1847) de la manière que voici, savoir en écrivant

$$z = \left(\frac{2Kk'}{\pi} \right)^{\frac{n-1}{2}} \Theta^{-n}(u) \cdot \Sigma.$$

On obtient pour Σ l'équation

$$\frac{d^2 \Sigma}{du^2} - 2nu \left(k'^2 - \frac{E}{K} \right) \frac{d\Sigma}{du} + 2nkk'^2 \frac{d\Sigma}{dk} = 0,$$

laquelle, en prenant

$$\omega = \frac{n\pi K'}{K}, \quad v = \frac{n\pi u}{2K},$$

devient

$$\frac{d^2 \Sigma}{dv^2} - 4 \frac{d\Sigma}{d\omega} = 0,$$

équation mentionnée par Jacobi, laquelle est satisfaite par

$$\Sigma = \Theta \left(nu, \frac{nK'}{K} \right) \quad \text{ou} \quad \Sigma = H \left(nu, \frac{nK'}{K} \right);$$

cela donne pour z deux valeurs qui sont le dénominateur et le numé-

rateur de la fraction dont il s'agit. J'ose croire que ce doit être à peu près de cette manière que l'équation fut trouvée par Jacobi.

Or les solutions en question de l'équation (1) peuvent être trouvées au moyen de l'équation de Jacobi; pour cela, au lieu des valeurs ci-dessus données de ω , ν , j'écris

$$\omega = \frac{\pi K'}{K}, \quad \nu = \frac{\sqrt{n\pi} u}{2K},$$

ce qui conduit à la même équation

$$\frac{d^2 \Sigma}{d\nu^2} - 4 \frac{d\Sigma}{d\omega} = 0,$$

laquelle sera ainsi satisfaite par

$$\Sigma = \Theta \left(\sqrt{nu}, \frac{K'}{K} \right), \quad \Sigma = H \left(\sqrt{nu}, \frac{K'}{K} \right),$$

ou, ce qui est la même chose, par

$$\Sigma = \Theta(\sqrt{nu}), \quad \Sigma = H(\sqrt{nu}).$$

L'équation (2) sera donc satisfaite par

$$z = \left(\frac{2Kk'}{\pi} \right)^{\frac{1}{2}(n-1)} \Theta^{-n}(u) \Theta(\sqrt{nu}),$$

ou, en se souvenant que $\Theta(0) = \sqrt{\frac{2Kk'}{\pi}}$, par

$$z = \frac{\Theta(\sqrt{nu})}{\Theta(0)} \cdot \frac{\Theta^n(0)}{\Theta^n(u)}.$$

Or en écrivant $\frac{x}{\sqrt{n}}$ au lieu de x , pour faire ensuite $n = \infty$, nous avons

$$\frac{x}{\sqrt{n}} = \sqrt{k} \sin am u,$$

équation qui se réduit à

$$u = \frac{x}{\sqrt{nk}};$$

ce qui donne

$$\Theta(\sqrt{nu}) = \Theta\left(\frac{x}{\sqrt{k}}\right), \quad \Theta^n u = \Theta^n(o) e^{\frac{1}{2} nu^2 \left(1 - \frac{E}{K}\right)} = \Theta^n(o) e^{\frac{x^2}{2k} \left(1 - \frac{E}{K}\right)},$$

puisque

$$\Theta(u) = \Theta(o) e^{\frac{1}{2} u^2 \left(1 - \frac{E}{K}\right) - k^2 \int_0^u du \int_0^u du \sin^2 am u},$$

et $n \int_0^{\frac{x}{\sqrt{n}}} du \int_0^u du \sin^2 am u$, en y substituant $u = \frac{x}{\sqrt{nk}}$, contient le facteur $\frac{1}{n}$ et se réduit ainsi à zéro. Donc on obtient

$$z = \frac{\Theta\left(\frac{x}{\sqrt{k}}\right)}{\Theta(o)} e^{\frac{x^2}{2k} \left(1 - \frac{E}{K}\right)}$$

comme solution de l'équation (1) qui se déduit de l'équation (2) en y écrivant $\frac{x}{\sqrt{n}}$ au lieu de x et puis $n = \infty$. Et cette valeur de z est précisément la fonction $\text{al}\left(\frac{x}{\sqrt{k}}\right)$ de M. Weierstrass. On obtient de même la solution

$$z = \frac{H\left(\frac{x}{\sqrt{k}}\right)}{\Theta(o)} e^{\frac{x^2}{2k} \left(1 - \frac{E}{K}\right)},$$

ou, ce qui est la même chose,

$$z = \frac{H\left(\frac{x}{\sqrt{k}}\right)}{\frac{1}{\sqrt{k}} H'(o)} e^{\frac{x^2}{2k} \left(1 - \frac{E}{K}\right)},$$

qui est la fonction $\sqrt{k} \text{al}\left(\frac{x}{\sqrt{k}}\right)$. Et d'une manière semblable les solu-

tions

$$z = \frac{H\left(\frac{x}{\sqrt{k}} + K\right)}{\Theta(o)} e^{\frac{x^2}{2k}\left(1 - \frac{E}{K}\right)}, \quad z = \frac{\Theta\left(\frac{x}{\sqrt{k}} + K\right)}{\Theta(o)} e^{\frac{x^2}{2k}\left(1 - \frac{E}{K}\right)},$$

qui sont les fonctions $\sqrt{\frac{k}{k'}} \operatorname{al}\left(\frac{x}{\sqrt{k}}\right)_2$, $\frac{1}{\sqrt{k'}} \operatorname{al}\left(\frac{x}{\sqrt{k}}\right)_3$.

J'ajoute que dans le Mémoire cité (1847) j'ai donné la suite

$$z = C_0 + C_1 \frac{x^2}{1.2} + C_2 \frac{x^4}{1.2.3.4} + \dots,$$

où

$$C_0 = 1,$$

$$C_1 = 0,$$

$$C_2 = -2,$$

$$C_3 = +8\alpha,$$

$$C_4 = -32\alpha^2 - 4,$$

$$C_5 = +128\alpha^3 + 96\alpha,$$

$$C_6 = -512\alpha^4 - 960\alpha^2 - 408,$$

$$C_7 = +2048\alpha^5 + 7168\alpha^3 + 7584\alpha,$$

$$C_8 = -8192\alpha^6 - 46080\alpha^4 - 88320\alpha^2 - 15384,$$

.....

de façon qu'en général

$$C_{r+2} = -(2r+1)(2r+2)C_r - (2r+2)\alpha C_{r+1} + 2(\alpha^2 - 4) \frac{dC_{r+1}}{dz};$$

c'est le développement de M. Weierstrass pour la fonction $\operatorname{al}\left(\frac{x}{\sqrt{k}}\right)$:
seulement je ne connaissais pas alors l'expression finie

$$\operatorname{al}\left(\frac{x}{\sqrt{k}}\right), \quad \text{ou} \quad \frac{1}{\Theta(o)} \Theta\left(\frac{x}{\sqrt{k}}\right) e^{\frac{x^2}{2k}\left(1 - \frac{E}{K}\right)}$$

de cette suite. Je remarquai en passant que pour $\alpha = 2$, la suite se réduit à

$$e^{\frac{1}{2}x^2} \frac{1}{2} (e^x + e^{-x}).$$

