JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES
FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874
PAR JOSEPH LIOUVILLE

MANNHEIM

Sur les arcs des courbes planes ou sphériques considérées comme enveloppes de cercles

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 7 (1862), p. 121-135.
<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1862_2_7__121_0>

SUR LES

ARCS DES COURBES PLANES OU SPHÉRIQUES

CONSIDÉRÉES COMME ENVELOPPES DE CERCLES;

Par M. MANNHEIM.

Les arcs des ovales de Descartes dépendent en général d'une transcendante compliquée. M. William Roberts a fait voir que *la différence des arcs de cette courbe compris entre deux rayons vecteurs issus d'un foyer est exprimable en arc d'ellipse* [*]. Pour arriver à ce théorème, M. Roberts examine les courbes représentées par l'équation polaire

$$(1) \qquad r^2 - 2r\Omega + \alpha = 0,$$

où Ω désigne une fonction quelconque de l'angle polaire ω, α une quantité constante, et calcule la somme et la différence des arcs compris entre deux rayons vecteurs issus du pôle. Remarquant ensuite que l'équation polaire de l'ovale de Descartes est de la forme (1), l'un des foyers étant pris pour pôle, il arrive à son théorème, en étudiant ce que deviennent alors les expressions trouvées dans le cas général pour la somme et la différence des arcs compris entre deux rayons vecteurs.

Interprétons les résultats généraux trouvés par M. Roberts, et pour cela définissons géométriquement les courbes représentées par l'équation (1).

Construisons (*fig.* 1) la courbe $\rho = \Omega$, et désignons-la par (A); décrivons du pôle P comme centre une circonférence ayant pour rayon $\sqrt{\alpha}$;

[*] *Journal de Mathématiques*, t. XV, p. 194.

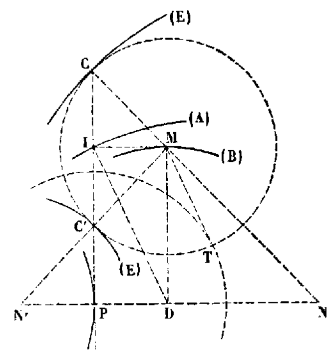
enfin construisons la courbe enveloppe des perpendiculaires élevées de tous les points de (A) aux rayons vecteurs qui y aboutissent, et désignons cette courbe par (B).

Je dis que la courbe enveloppe (E) des circonférences décrites de tous les points de (B) comme centres et coupant orthogonalement la circonférence de rayon $\sqrt{\alpha}$ a pour équation polaire

$$r^2 - 2r\Omega + \alpha = 0.$$

Cherchons en quels points une de ces circonférences décrite d'un

Fig. 1.



point quelconque M de (B) touche son enveloppe (E). Ces points ne sont autres que les points d'intersection de la circonférence (M) avec une circonférence infiniment voisine (M_1) ayant, comme la première, pour centre un point M_1 de (B) et coupant orthogonalement la circonférence de rayon $\sqrt{\alpha}$. Le point P étant le centre de la circonférence coupée orthogonalement par (M) et (M_1), fait partie de l'axe radical de ces circonférences, on sait en outre que cet axe radical est perpendiculaire à la ligne des centres MM_1; il faut donc, pour l'obtenir, abaisser une perpendiculaire du point P sur MM_1. Lorsque M_1 se rapprochant indéfiniment de M, arrive à se confondre avec ce point, la droite MM_1 devient tangente à (B) en M, et la perpendiculaire PI abaissée de P sur cette tangente coupe (M) aux points où elle touche son enveloppe.

Désignons par C et C′ ces deux points; d'après la manière dont ils sont déterminés, on voit que

$$PC + PC' = 2PI$$

et que

$$PC \times PC' = \alpha,$$

et comme PI est le rayon vecteur de (A), on a

$$PC + PC' = 2\Omega.$$

Les deux longueurs PC et PC′ sont donc les racines de l'équation (1) pour une valeur déterminée de ω, et lorsque l'on fait varier le point M sur (B) ou, ce qui revient au même, le point I sur (A), et par suite la valeur de ω, le points C et C′ décrivent la courbe (E), dont l'équation polaire est alors (1).

Nous sommes ainsi conduit à considérer l'équation (1) comme représentant une courbe enveloppe de circonférences. Les arcs dont nous allons nous occuper sont comptés à partir de points correspondants tels que C et C′ et limités à d'autres points correspondants. Pour plus de commodité dans le langage, nous dirons que ces arcs sont correspondants. Ainsi lorsque nous considérerons un arc de (B) et que de tous les points de cet arc nous décrirons des circonférences, ces courbes détermineront sur chaque branche de (E) deux arcs qui sont nos arcs correspondants.

Ceci posé, interprétons géométriquement les résultats de M. Roberts. En désignant par s_1 et s_2 deux arcs correspondants, ce géomètre trouve

$$(2) \qquad s_1 + s_2 = 2\int \sqrt{\frac{\Omega^2 + \Omega'^2 - \alpha}{\Omega^2 - \alpha}}\,\Omega\, d\omega,$$

$$(3) \qquad s_1 - s_2 = 2\int \sqrt{\Omega^2 + \Omega'^2 - \alpha}\, d\omega,$$

où Ω' désigne la dérivée de Ω par rapport à ω.

$\frac{d\Omega}{d\omega}$ est la sous-normale de (A); d'ailleurs la normale à cette courbe au point I passe par le point D où la normale MD à (B) rencontre la perpendiculaire élevée du point P à PI; on a donc

$$\frac{d\Omega}{d\omega} \quad \text{ou} \quad \Omega' = \text{PD}.$$

PI étant égal à Ω et PD à Ω', $\sqrt{\Omega^2 + \Omega'^2}$ est égal à ID, c'est-à-dire à la normale en I à (B) ou à son égal MP.

$\sqrt{\Omega^2 + \Omega'^2 - \alpha}$ ou $\sqrt{\overline{\text{MP}}^2 - \alpha}$ est la longueur de la tangente MT menée de M à la circonférence (P) de rayon $\sqrt{\alpha}$, et par suite elle n'est autre que le rayon MC de la circonférence (M).

$\sqrt{\Omega^2 - \alpha}$ ou $\sqrt{\overline{\text{PI}}^2 - \alpha}$ est la tangente menée de I à la circonférence (P) de rayon $\sqrt{\alpha}$. Cette tangente est égale à IC, puisque les circonférences (M) et (P) se coupent orthogonalement.

Les égalités (2) et (3) peuvent donc s'écrire

$$(2') \qquad s_1 + s_2 = 2\int \frac{\text{MC} \times \text{PI}}{\text{IC}}\, d\omega = 2\int \text{MN}.d\omega,$$

$$(3') \qquad s_1 - s_2 = 2\int \text{MC}.d\omega.$$

Les formules (2) et (3) ont été établies en supposant que toutes les cordes de contact analogues à CC' passent par un même point fixe P, mais les formules (2') et (3') sont évidemment applicables aux cas où les circonférences variables ont leurs centres sur une courbe quelconque, leurs rayons variant suivant une loi arbitraire. Dans ce dernier cas, évidemment aussi les cordes de contact analogues à CC' enveloppent une courbe quelconque. Pour appliquer l'équation (2'), on déterminera MN en considérant pour la corde de contact correspondante à une circonférence (M), le point P où elle touche son enveloppe.

Arrivons à la démonstration directe des formules (2') et (3'), démonstration qui fera bien comprendre à quoi tient la simplicité de ces formules.

De tous les points d'une courbe (B), on décrit des circonférences dont les rayons varient suivant une loi quelconque; on demande les relations qui existent entre les arcs correspondants de la courbe (E) enveloppe de ces circonférences.

Soient CC′ la corde de contact de la circonférence (M) avec (E) et P le point où CC′ touche l'enveloppe des cordes de contact telles que CC′. En désignant par ds_1 et par ds_2 les arcs élémentaires déterminés sur (E) par deux cordes infiniment voisines, on a

$$ds_1 = \mathrm{NC}\,d\omega,$$
$$ds_2 = \mathrm{N'C'}\,d\omega,$$

$d\omega$ étant l'angle de contingence en P de la courbe enveloppe des cordes telles que CC′; mais comme ces cordes sont respectivement perpendiculaires aux tangentes de (B), $d\omega$ est aussi l'angle de contingence de cette dernière courbe en M. En ajoutant et retranchant les deux égalités que nous venons d'écrire, on a

$$ds_1 + ds_2 = (\mathrm{NC} + \mathrm{N'C'})\,d\omega = 2\,\mathrm{MN}\,d\omega,$$
$$ds_1 - ds_2 = (\mathrm{NC} - \mathrm{N'C'})\,d\omega = 2\,\mathrm{MC}\,d\omega,$$

puisque les triangles CMC′ et N′MN sont isocèles. En intégrant, nous avons les formules (2′) et (3′), et nous voyons que c'est parce que les cordes de contact telles que CC′ coupent respectivement les deux branches de (E) sous des angles égaux, que ces formules sont aussi simples. On doit remarquer qu'elles se changent l'une de l'autre, lorsque le point P, au lieu d'être sur le prolongement de CC′, comme nous l'avons supposé, est entre les points C et C′.

Passons aux applications des formules (2′) et (3′).

L'une de ces applications est relative à certaines courbes que nous allons définir et qui jouent un grand rôle dans la théorie des caustiques.

Lorsque des rayons émanés d'un point sont réfléchis par une courbe, ils enveloppent *une caustique par réflexion*. Le lieu des points qu'on obtient en portant sur chaque rayon réfléchi une longueur égale à celle du rayon incident est une trajectoire orthogonale des rayons réfléchis; c'est une développante particulière des caustiques. J. Bernoulli a donné à ces courbes le nom d'*anticaustiques*.

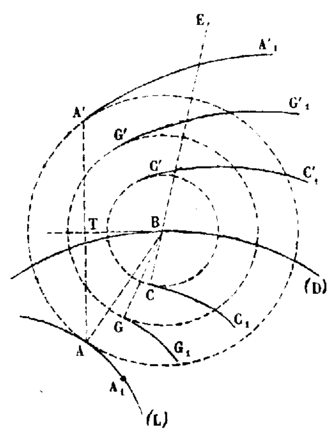
Nous étendons cette expression d'anticaustique à la courbe analogue que l'on obtient dans le cas de la réfraction, en considérant non plus un point lumineux, mais une courbe d'où s'échappent normalement les rayons lumineux.

Voici comment nous définirons l'*anticaustique* dans le cas de la réfraction.

L'*anticaustique* est l'enveloppe d'une suite de cercles dont les centres décrivent la ligne dirimante, dont les rayons sont aux distances de ces points à la courbe lumineuse dans un rapport constant qui est l'indice de réfraction [*]. Cette courbe a deux branches que l'on distingue par le signe de l'indice. Ces deux branches peuvent être ou ne pas être des courbes distinctes; nous désignons toujours leur ensemble sous le nom d'*anticaustique complète* [**].

Soient (L) (*fig.* 2) une courbe lumineuse, (D) une ligne dirimante,

FIG. 2.



AB un rayon lumineux réfracté suivant BE, C le point correspondant de l'anticaustique, déterminé de telle façon que $\frac{AB}{BC}$ égale l'indice de réfraction λ. L'anticaustique complète est l'enveloppe des circonfé-

[*] Ces courbes ont été étudiées par M. Quételet sous le nom de *caustiques secondaires*.

[**] *Nouvelles Annales de Mathématiques*, t. XX, p. 220.

rences telles que (B), décrite de B comme centre avec BC pour rayon.

En appliquant ce qui précède, on a pour la différence des arcs élémentaires correspondants sur cette courbe

$$ds_1 - ds_2 = 2\,\mathrm{BC}\,d\omega,$$

$d\omega$ étant l'angle de contingence de (D) en B.

Pour une autre anticaustique complète correspondante à l'indice $\mu = \frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{BG}}$, on a

$$ds'_1 - ds'_2 = 2\,\mathrm{BG}\,d\omega.$$

En divisant membre à membre ces deux égalités, il vient

$$\frac{ds'_1 - ds'_2}{ds_1 - ds_2} = \frac{\mathrm{BG}}{\mathrm{CC}} = \frac{\lambda}{\mu},$$

et en intégrant,

$$\frac{\mathrm{GG_1} - \mathrm{G'G'_1}}{\mathrm{CC_1} - \mathrm{C'C'_1}} = \frac{\lambda}{\mu}.$$

On peut donc dire : *Pour deux anticaustiques complètes relatives à la même courbe lumineuse, à la même ligne dirimante et ne différant que par les indices de réfraction, les différences* [*] *des arcs correspondants sont dans le rapport inverse de ces indices.*

On introduit l'arc de la courbe lumineuse elle-même en faisant $\mu = 1$, il vient alors

$$\frac{\mathrm{AA_1} - \mathrm{A'A'_1}}{\mathrm{CC_1} - \mathrm{C'C'_1}} = \lambda.$$

Dans le cas particulier où (L) se réduit à un point lumineux, la courbe $\mathrm{A'A'_1}$ n'est autre que la courbe que l'on obtient en abaissant du point lumineux des perpendiculaires sur les tangentes à (D), et en prolongeant ces droites de longueurs égales à elles-mêmes. En d'autres termes, la courbe $\mathrm{A_1A'_1}$ est semblable à la podaire de la ligne dirimante correspondante au point lumineux. Nous pouvons donc dire :

[*] Dans certains cas, d'après une remarque faite précédemment, il faudrait dire les sommes.

La différence des arcs correspondants d'une anticaustique complète relative à un point lumineux est exprimable en arc de la podaire de la ligne dirimante prise par rapport à ce point lumineux.

Prenons une circonférence O pour ligne dirimante et un point F_1 pour point lumineux; dans ce cas l'anticaustique complète est un ovale de Descartes [*]. D'après la propriété générale que nous venons d'énoncer, nous voyons immédiatement que la différence des arcs correspondants d'un ovale de Descartes est exprimable en arc de podaire d'un cercle, mais cette courbe a des arcs exprimables en arcs d'ellipses [**] : donc la différence des arcs correspondants d'un ovale de Descartes est exprimable en arc d'ellipse.

Nous n'avons encore ainsi qu'une partie du théorème de M. Roberts, car il faut remarquer que les arcs correspondants de l'ovale de Descartes ne sont pas compris entre des droites passant par le point lumineux. Pour savoir comment sont disposés les arcs correspondants des ovales de Descartes, il faut connaître quelques propriétés de ces courbes.

Les cordes de contact des circonférences dont l'enveloppe est l'ovale de Descartes, anticaustique complète du cercle, passent par un point fixe. Ce point est un foyer de la courbe. C'est entre des droites issues de ce foyer que sont compris les arcs correspondants.

L'ovale de Descartes considéré comme anticaustique complète du cercle correspondant à un point lumineux a sur son axe trois foyers réels. Il peut être considéré comme enveloppe de cercles de trois manières différentes. La courbe se compose de deux branches (E) et (E') : l'une (E) renferme complétement l'autre (E'); au dehors de la plus grande se trouve un foyer F_1, dans l'intérieur de l'autre les deux autres foyers F_2 et F_3, F_2 est entre F_1 et F_3.

Deux droites issues du foyer F_1 comprennent sur la même branche des arcs correspondants dont on doit prendre la *différence*.

Deux droites issues du foyer F_2 comprennent sur l'une et l'autre

---

[*] Ce théorème est de M. Quételet.

[**] On arrive facilement à ce résultat en cherchant l'expression de l'arc élémentaire d'une ellipse engendrée par un point du plan d'une circonférence qui roule dans une autre de rayon double.

branche des arcs correspondants dont on doit prendre la *somme*.

Et pour le foyer F_3, on doit prendre sur l'une et l'autre branche les arcs correspondants et faire leur *différence*.

Nous pouvons résumer ces différents cas de la manière suivante :

Dans un ovale de Descartes, la différence des arcs correspondants compris entre des rayons vecteurs issus de l'un des foyers extrêmes est exprimable en arc d'ellipse; pour le foyer moyen, c'est la somme des arcs correspondants qui est exprimable en arc d'ellipse.

Nous venons de trouver pour une ligne dirimante donnée comment on peut exprimer la différence des arcs correspondants; proposons-nous le problème inverse et cherchons, par exemple, la ligne dirimante donnant lieu à une anticaustique complète correspondante à un point lumineux, telle, que la différence des arcs correspondants soit égale à une portion de droite.

D'après ce qui précède, il suffit de prendre pour ligne dirimante la courbe qui jouit de la propriété d'avoir une droite pour podaire. Cette courbe est une parabole. Donc *la différence des arcs correspondants de l'anticaustique complète d'une parabole, le foyer étant le point lumineux, est égale à un segment de droite que l'on peut facilement construire.*

Revenons à l'ovale de Descartes, que nous n'avons considéré que comme anticaustique du cercle. L'équation polaire de cette courbe

$$\rho^2 - 2\rho(a + b\cos\theta) + c^2 = 0 \tag{4}$$

étant de la forme (1), cet ovale possède, comme toutes les courbes représentées par l'équation (1), la propriété de se transformer en elle-même par rayons vecteurs réciproques, le pôle de transformation étant au pôle d'où partent les rayons vecteurs, et la constante de transformation étant le terme tout connu de l'équation polaire. Le pôle de transformation, en vertu de la propriété qu'il possède de permettre de transformer la courbe en elle-même, est appelé *pôle principal* [*].

---

[*] *Nouvelles Annales de Mathématiques*, t. XX, p. 218.

En nous reportant à la définition géométrique des courbes représentées par l'équation (1), nous voyons qu'on peut définir l'ovale de Descartes comme étant *la courbe enveloppe d'une suite de circonférences dont les centres décrivent une circonférence donnée et qui coupent orthogonalement une autre circonférence donnée.*

Le centre de cette dernière est le pôle principal de transformation.

Nous disons que les centres des circonférences variables décrivent une circonférence, parce que, d'après ce que nous avons vu précédemment, ils sont sur la courbe enveloppe des perpendiculaires élevées aux extrémités des rayons vecteurs de la courbe dont l'équation polaire est

$$\rho_1 = a + b\cos\theta,$$

et cette courbe est une podaire de cercle.

On doit remarquer que le pôle principal de l'ovale se confond avec l'un des foyers, et comme les trois foyers jouent le même rôle, il résulte immédiatement de là et de ce qui précède que l'ovale de Descartes a trois pôles principaux et est de trois manières différentes l'enveloppe des cercles qui ont pour centres radicaux les trois pôles principaux; enfin que les centres des circonférences variables décrivent trois circonférences [*].

L'anticaustique du cercle a donc trois pôles principaux, mais en considérant l'ovale de Descartes comme enveloppe de cercles dont les centres décrivent une circonférence et qui coupent orthogonalement un cercle donné, on n'a plus toujours trois foyers réels et par suite trois pôles principaux sur l'axe. Il suffit, pour le voir, de considérer le cas où, pour définir ainsi l'ovale de Descartes, on prend deux circonférences qui se coupent. Quoi qu'il en soit, les arcs correspondants de

[*] Pour compléter ceci, nous dirons que ces trois circonférences sont concentriques. Cette propriété m'a été indiquée par M. Moutard, qui y a été conduit comme conséquence d'une propriété générale, dont il veut bien me permettre de faire ici mention : *Les courbes du quatrième ordre qui peuvent se transformer en elles-mêmes par rayons vecteurs réciproques ont quatre pôles principaux, elles peuvent être considérées de quatre manières différentes comme enveloppes de cercles, les centres de ces circonférences sont sur quatre coniques homofocales.*

l'ovale de Descartes sont toujours compris entre des droites issues d'un pôle principal.

Enfin, pour terminer ce qui est relatif aux courbes planes, examinons la courbe enveloppe d'une suite de cercles décrits de tous les points d'une courbe quelconque comme centres avec les rayons de courbure correspondants pour rayons. Les points où l'une de ces circonférences touche son enveloppe, se trouvent sur une perpendiculaire à la tangente en ce point à la courbe donnée et passant par le centre de courbure de la développée de cette courbe correspondant au même point. En d'autres termes, *l'enveloppe des cordes de contact des circonférences variables avec leur enveloppe est la troisième développée de la courbe donnée.*

Les points où ces circonférences touchent leur enveloppe sont d'un même côté par rapport au point où la ligne qui les contient touche son enveloppe, il y a donc lieu de considérer la différence des arcs correspondants de l'enveloppe que nous examinons. Comme les circonférences variables ont pour rayons les rayons de courbure de la courbe donnée, on a pour cette différence

$$2\int \rho\, d\omega,$$

c'est-à-dire deux fois la longueur de la courbe donnée.

Nous pouvons donc dire :

Lorsque de tous les points d'un arc d'une courbe donnée comme centres avec les rayons de courbure pour rayons on décrit des circonférences, ces courbes donnent lieu à une enveloppe pour laquelle la différence des arcs correspondants est égale à la longueur de l'arc considéré.

Comme cas particulier, on peut examiner la développante du cercle qui conduit à une courbe dont l'équation polaire est de la forme (1).

Arrivons aux lignes sphériques.

On considère une sphère de centre O et une courbe (B) tracée sur sa surface; de tous les points de cette ligne comme pôles, on décrit des circonférences (M) de rayon variable; on demande l'expression de la différence des arcs correspondants de la courbe enveloppe (E) de toutes ces circonférences.

Soient M et M_1 deux points infiniment voisins de (B); de ces points comme pôles décrivons des petits cercles, les plans de ces cercles sont respectivement perpendiculaires aux lignes OM, OM_1, et par suite la droite d'intersection de ces deux plans est perpendiculaire au plan MOM_1. Lorsque M_1 se confond avec M, ce plan est tangent suivant OM à la surface conique que l'on obtient en joignant le centre O à tous les points de (B).

Désignons par CC′ la droite d'intersection des plans des circonférences (M) et (M_1), C et C′ étant les points de contact de (M) avec (E). La droite CC′, intersection des plans des circonférences (M) et (M_1), peut être considérée comme une génératrice de la surface développable enveloppe des plans des circonférences telles que (M), et la courbe (E) peut être aussi considérée comme l'intersection de la sphère avec cette développable.

Les génératrices de cette développable sont respectivement perpendiculaires aux plans tangents à la surface conique dont le sommet est en O et dont (B) est la directrice; CC′ et la génératrice voisine font donc entre elles un angle qui est égal à l'angle du plan tangent suivant OM à la surface conique [O, (B)] avec le plan tangent infiniment voisin, et ce dernier n'est autre que l'angle de contingence géodésique de (B) en M.

Ceci posé, appliquons sur un plan notre développable, ses plans tangents et les petits cercles contenus dans ceux-ci. (E) se transformera en une courbe (E′) enveloppe de ces petits cercles, et nous pouvons faire usage de l'expression trouvée précédemment pour la différence des arcs correspondants des courbes planes. (E) et (E′) ont même longueur, et les rayons des petits cercles dont (E′) est l'enveloppe sont les sinus des rayons sphériques des petits cercles (M). La génératrice CC′ devient après le développement la corde de contact de (M) avec (E′), et toutes les cordes telles que CC′ enveloppent la transformée de l'arête de rebroussement de notre développable. En appelant $d\gamma$ l'angle de deux cordes de contact infiniment voisines, nous avons, d'après ce qui précède, pour la différence des arcs correspondants,

$$(5) \qquad 2\int \sin MC . d\gamma.$$

Cette formule peut être immédiatement employée dans le cas de la sphère, puisque $d\gamma$ est l'angle de contingence géodésique de (B) en M; elle correspond à la formule (3′) et donne celle-ci, lorsqu'on suppose que le rayon de la sphère est devenu infini.

L'enveloppe des grands cercles tels que CC′ est l'intersection avec la sphère d'une surface conique dont le sommet est en O et dont la directrice est l'arête de rebroussement de notre développable. Cette enveloppe se réduit à un point, lorsque cette arête de rebroussement se réduit elle-même à un point, c'est-à-dire lorsque la développable est simplement une surface conique.

Cette circonstance se présente, par exemple, toutes les fois que l'on considère la courbe d'intersection d'une surface ayant un pôle principal avec une sphère assujettie seulement à la condition de couper à angle droit la sphère ayant son centre au pôle principal et pour rayon la constante de la transformation qui permettrait de transformer la surface en elle-même par rayons vecteurs réciproques.

La courbe résultant de l'intersection d'un tore et d'une sphère quelconque offre toujours cette particularité, parce que tous les points de l'axe du tore sont des pôles principaux, et qu'il est toujours possible de trouver un point de cet axe qui sera le centre d'une sphère coupant à angle droit le tore et la sphère donnée. Ce point de l'axe est le sommet d'une surface conique du second degré qui contient la courbe d'intersection du tore et de la sphère. Cette courbe peut être considérée sur la sphère comme l'enveloppe de petits cercles décrits de tous les points d'une ellipse sphérique comme pôles et coupant à angle droit un petit cercle donné. Sous cette forme, on voit qu'on peut appliquer la formule (5). Désignons par D la distance sphérique d'un point M de l'ellipse sphérique au pôle du petit cercle donné de rayon R, et par $d\gamma$ l'angle de contingence géodésique de l'ellipse en M; on a immédiatement, pour la différence des arcs correspondants de la courbe dont nous nous occupons,

$$2\int \frac{\sqrt{\sin^2 D - \sin^2 R}}{\cos R}\, d\gamma.$$

On peut faire sur la sphère une application de la formule (5) complétement analogue à ce que nous avons fait précédemment pour les anticaustiques.

De tous les points d'une ligne sphérique (B) comme pôles, décrivons des petits cercles dont les sinus des rayons sphériques soient aux sinus des distances sphériques de ces pôles à une courbe donnée (L) dans un rapport constant, nous obtiendrons ainsi une courbe enveloppe (E) et nous pourrons comparer la différence des arcs correspondants de cette courbe à celle des arcs correspondants de la courbe (E_1) engendrée comme (E) et qui ne diffère de celle-ci que par la valeur du rapport donné. Le rapport de ces différences est, comme pour les courbes planes, égal à l'inverse du quotient des rapports constants qui entrent dans la définition de (E) et de (E_1).

Lorsque (L) se réduit à un point, la différence des arcs correspondants de (E) est exprimable en arc de la courbe que l'on obtient en abaissant de ce point des arcs de grands cercles perpendiculaires aux tangentes de (B) et en prolongeant ces arcs de longueurs égales à eux-mêmes.

Montrons un exemple où cette différence est exprimable en arc de cercle, et pour cela rappelons d'abord quelques résultats.

Si le foyer F d'une conique plane est le point de contact du plan de cette conique avec une sphère, le cône ayant son sommet au centre de la sphère et pour directrice cette conique coupe la sphère suivant une conique sphérique ayant aussi F pour foyer.

Le cône ayant le centre de la sphère pour sommet et la podaire de la conique plane correspondante à F pour directrice, coupe la sphère suivant la podaire de l'ellipse sphérique correspondante au même point F.

La podaire correspondante au foyer de l'ellipse sphérique dont l'axe focal augmenté de la distance sphérique des foyers est égal à 2π est un grand cercle.

Si l'on joint, par des arcs de grand cercle, un point fixe d'une sphère à tous les points d'un grand cercle, en prolongeant chacun de ces arcs d'une longueur égale à eux-mêmes, on obtient un petit cercle.

A l'aide de tous ces résultats, on se rendra facilement compte de l'exactitude de la propriété suivante :

On considère sur une sphère une ellipse sphérique dont la distance sphérique des foyers augmentée de l'axe focal est égale à 2π, de tous les points de cette courbe comme pôles on décrit des petits cercles dont les rayons sphériques ont des sinus proportionnels aux sinus des distances sphériques de leurs pôles à l'un des foyers de l'ellipse ; la différence des arcs correspondants de la courbe enveloppe de ces cercles est exprimable en arc de cercle.

Ces quelques résultats suffisent pour montrer la nature des applications que l'on peut faire de la formule (5).

Quant à la formule (3′), nous avons laissé de côté tout ce qui est relatif à son emploi dans la transformation des propriétés d'arcs de courbes en propriétés d'arcs de courbes, soit à l'aide de la méthode des polaires réciproques, soit à l'aide de la transformation par rayons vecteurs réciproques.