JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

Sur la forme $x^2 + y^2 + 16z^2 + 16t^2$

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 7 (1862), p. 117-120.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1862_2_7__117_0>

SUR LA FORME
$x^2 + y^2 + 16z^2 + 16t^2$;

PAR M. J. LIOUVILLE.

---

1. Cette forme se rattache aux précédentes. Prenant donc un entier n pair ou impair que nous représenterons par $2^\alpha m$, m étant impair et l'exposant α pouvant se réduire à zéro, nous aurons à considérer la somme $\zeta_1(m)$ des diviseurs de m et une autre somme

$$\sum (-1)^{\frac{i-1}{2}} i,$$

relative aux entiers positifs i qui peuvent figurer dans l'équation

$$m = i^2 + 4s^2,$$

où l'entier s est indifféremment positif, nul ou négatif. C'est de ces deux fonctions numériques que dépend le nombre N des représentations de n par la forme

$$x^2 + y^2 + 16z^2 + 16t^2,$$

et voici comment on peut calculer dans chaque cas donné ce nombre N.

2. Soit d'abord n impair, $n = m$. Il est évident que l'on a $N = 0$, si m est de la forme $4l + 3$. Il n'en est pas de même quand m est de la forme $4l + 1$, qui comprend ces deux autres $8k + 1$, $8k + 5$. On a

$$N = \zeta_1(m) + 3 \sum (-1)^{\frac{i-1}{2}} i$$

si $m = 8k + 1$, et

$$N = \zeta_1(m) + \sum (-1)^{\frac{i-1}{2}} i$$

si $m = 8k + 5$.

C'est la première de ces deux formules que l'on doit employer pour $m = 1$. Elle donne alors

$$N = 4;$$

et cela s'accorde avec les deux équations

$$1 = (\pm 1)^2 + 0^2 + 16.0^2 + 16.0^2,$$
$$1 = 0^2 + (\pm 1)^2 + 16.0^2 + 16.0^2,$$

dont chacune fournit deux représentations.

Pour $m = 9$, il vient

$$N = 13 - 3.3 = 4;$$

et c'est ce qui est vérifié par les équations

$$9 = (\pm 3)^2 + 0^2 + 16.0^2 + 16.0^2,$$
$$9 = 0^2 + (\pm 3)^2 + 16.0^2 + 16.0^2.$$

Enfin pour $m = 17$, on a

$$N = 18 + 6 = 24.$$

Or les équations

$$17 = 1^2 + 4^2 + 16.0^2 + 16.0^2,$$
$$17 = 1^2 + 0^2 + 16.1^2 + 16.0^2,$$

donnent en effet pour le nombre 17 vingt-quatre représentations si l'on affecte du double signe $\pm$ les racines des carrés qui ne sont pas nuls et si l'on opère les permutations convenables.

3. Soit actuellement n impairement pair, $n = 2m$. On aura encore $N = 0$ si $m = 4l + 3$. Mais si m est de la forme $4l + 1$, on distinguera deux cas.

On aura

$$N = 2\zeta_1(m) + 2\sum(-1)^{\frac{i-1}{2}} i$$

si $m = 8k + 1$, mais

$$N = 2\zeta_1(m) - 2\sum(-1)^{\frac{i-1}{2}} i$$

si $m = 8k + 5$.

Ainsi le nombre 2 a quatre représentations contenues dans l'équation

$$2 = (\pm 1)^2 + (\pm 1)^2 + 16.0^2 + 16.0^2;$$

et le nombre 10 en a huit, qui répondent aux équations ci-après :

$$10 = (\pm 1)^2 + (\pm 3)^2 + 16.0^2 + 16.0^2,$$
$$10 = (\pm 3)^2 + (\pm 1)^2 + 16.0^2 + 16.0^2.$$

4. Prenons enfin n pairement pair, $n = 2^\alpha m$, $\alpha > 1$. L'équation

$$2^\alpha m = x^2 + y^2 + 16z^2 + 16t^2$$

ne pouvant alors subsister qu'avec x et y pairs, on aura $x = 2x_1$, $y = 2y_1$, partant

$$2^{\alpha-2} m = x_1^2 + y_1^2 + 4(z^2 + t^2),$$

de sorte qu'on retrouvera une équation déjà discutée (dans le cahier de septembre 1860). On est ainsi conduit, pour le nombre N des représentations d'un nombre pairement pair, n ou $2^\alpha m$, par la forme

$$x^2 + y^2 + 16z^2 + 16t^2,$$

qui nous occupe ici, aux conséquences suivantes.

1° Pour n divisible par 4, non par 8, $n = 4m$, on a $N = 0$ si $m = 4l + 3$. Mais

$$N = 4\zeta_1(m)$$

si $m = 4l + 1$.

Ainsi le nombre 4 a quatre représentations, fournies par les deux équations

$$4 = (\pm 2)^2 + 0^2 + 16.0^2 + 16.0^2,$$
$$4 = 0^2 + (\pm 2)^2 + 16.0^2 + 16.0^2.$$

2° Pour n divisible par 8, non par 16, $n = 8m$, quelle que soit la forme linéaire de m, on a

$$N = 4\zeta_1(m).$$

3° Pour n divisible par 16, non par 32, $n = 16m$, on a également une seule formule :

$$N = 8\zeta_1(m).$$

4° Enfin pour n divisible par 32, $n - 2^{\alpha} m$, $\alpha > 4$, on a invariablement

$$N = 24\zeta_1(m),$$

quelle que soit la forme linéaire de m et quelque grand que l'exposant α puisse devenir.