JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES
FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874
PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

Sur la forme $x^2 + 4y^2 + 16z^2 + 16t^2$

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 7 (1862), p. 105-108.
<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1862_2_7__105_0>

SUR LA FORME
$x^2 + 4y^2 + 16z^2 + 16t^2$;

PAR M. J. LIOUVILLE.

1. Étant donné un entier n pair ou impair (que nous représenterons par $2^\alpha m$, m étant impair et l'exposant α pouvant se réduire à zéro), on demande le nombre N des représentations de n par la forme

$$x^2 + 4y^2 + 16z^2 + 16t^2,$$

c'est-à-dire le nombre N des solutions de l'équation indéterminée

$$n = x^2 + 4y^2 + 16z^2 + 16t^2,$$

où x, y, z, t sont des entiers indifféremment positifs, nuls ou négatifs.

Il est bien clair que l'on a $N = 0$ quand n est impair et de la forme $4l + 3$, comme aussi quand n est impairement pair, $n = 2m$. On a encore $N = 0$ quand $n = 4(4l + 3)$. Mais dans tous les autres cas la valeur de N est > 0, et on l'obtient à priori ainsi que je vais l'expliquer.

2. Soit d'abord n impair, $n = m$ (bien entendu $m = 4l + 1$). Il faudra considérer, avec la somme $\zeta_1(m)$ des diviseurs de m, cette autre somme

$$\sum (-1)^{\frac{i-1}{2}} i,$$

où i désigne successivement tous les nombres entiers positifs figurant dans l'équation

$$m = i^2 + 4s^2 :$$

on prend l'entier s positif, nul ou négatif. On a

$$N = \frac{1}{2}\left[\zeta_1(m) + 3\sum(-1)^{\frac{i-1}{2}} i\right]$$

si $m = 8k + 1$, mais

$$N = \frac{1}{2}\left[\zeta_1(m) + \sum(-1)^{\frac{i-1}{2}} i\right]$$

si $m = 8k + 5$.

Pour les nombres $8k + 1$, soit d'abord $m = 1 = 1^2 + 4.0^2$; il nous viendra

$$N = \frac{1}{2}(1 + 3) = 2,$$

et cela s'accorde avec l'équation

$$1 = (\pm 1)^2 + 4.0^2 + 16.0^2 + 16.0^2,$$

qui fournit deux représentations.

Soit ensuite $m = 9 = 3^2 + 4.0^2$. On aura

$$N = \frac{1}{2}(13 - 9) = 2,$$

et en effet il n'y a cette fois encore que deux représentations exprimées par l'équation

$$9 = (\pm 3)^2 + 4.0^2 + 16.0^2 + 16.0^2.$$

Soit enfin $m = 17 = 1^2 + 4(\pm 2)^2$. Il nous viendra

$$N = \frac{1}{2}(18 + 6) = 12.$$

Les équations

$$\begin{aligned}
17 &= (\pm 1)^2 + 4(\pm 2)^2 + 16.0^2 + 16.0^2,\\
17 &= (\pm 1)^2 + 4.0^2 + 16(\pm 1)^2 + 16.0^2,\\
17 &= (\pm 1)^2 + 4.0^2 + 16.0^2 + 16(\pm 1)^2,
\end{aligned}$$

confirment ce fait.

Pour les nombres $8k+5$, soit $m = 5 = 1^2 + 4(\pm 1)^2$. Notre formule donnera

$$N = \frac{1}{2}(6+2) = 4,$$

ce qui s'accorde avec l'équation

$$5 = (\pm 1)^2 + 4(\pm 1)^2 + 16.0^2 + 16.0^2,$$

où l'on trouve quatre représentations.

Soit encore $m = 13 = 3^2 + 4(\pm 1)^2$. Il nous viendra

$$N = \frac{1}{2}(14-6) = 4,$$

et en effet le nombre 13 a quatre représentations fournies par l'équation

$$13 = (\pm 3)^2 + 4(\pm 1)^2 + 16.0^2 + 16.0^2.$$

Soit enfin $m = 21$. L'équation

$$21 = i^2 + 4s^2$$

étant impossible, on a simplement

$$N = \frac{1}{2}\zeta_1(21) = 16,$$

et 21 a bien seize représentations contenues dans les deux équations

$$21 = (\pm 1)^2 + 4(\pm 1)^2 + 16(\pm 1)^2 + 16.0^2,$$
$$21 = (\pm 1)^2 + 4(\pm 1)^2 + 16.0^2 + 16(\pm 1)^2.$$

3. Soit à présent n pairement pair, $n = 2^\alpha m$, $\alpha > 1$. Il est clair que dans l'équation

$$2^\alpha m = x^2 + 4y^2 + 16z^2 + 16t^2$$

x devra être pair. Soit donc $x = 2x_1$. En divisant par 4, nous aurons

$$2^{\alpha-2} m = x_1^2 + y^2 + 4(z^2 + t^2).$$

Or cette équation a été discutée d'avance (dans le cahier de septembre 1860). Il en résulte, pour le nombre N des représentations de n par la forme

$$x^2 + 4y^2 + 16z^2 + 16t^2,$$

qui nous occupe ici, les conclusions suivantes.

1° Pour n divisible par 4, non par 8, $n = 4m$, on a

$$\mathrm{N} = 4\zeta_1(m)$$

quand $m = 4l + 1$. J'ai déjà dit que $\mathrm{N} = 0$ quand $m = 4l + 3$. Ainsi pour $n = 4$, on a quatre représentations : elles sont fournies par les équations

$$4 = (\pm 2)^2 + 4.0^2 + 16.0^2 + 16.0^2,$$
$$4 = 0^2 + 4(\pm 1)^2 + 16.0^2 + 16.0^2.$$

2° Pour n divisible par 8, non par 16, $n = 8m$, on a

$$\mathrm{N} = 4\zeta_1(m),$$

quelle que soit la forme linéaire de m. Ainsi le nombre 8 a les quatre représentations exprimées par

$$8 = (\pm 2)^2 + 4(\pm 1)^2 + 16.0^2 + 16.0^2.$$

3° Mais pour n divisible par 16, non par 32, il vient

$$\mathrm{N} = 8\zeta_1(m).$$

Ainsi 16 a huit représentations : elles sont fournies par les équations

$$16 = (\pm 4)^2 + 4.0^2 + 16.0^2 + 16.0^2,$$
$$16 = 0^2 + 4(\pm 2)^2 + 16.0^2 + 16.0^2,$$
$$16 = 0^2 + 4.0^2 + 16(\pm 1)^2 + 16.0^2,$$
$$16 = 0^2 + 4.0^2 + 16.0^2 + 16(\pm 1)^2.$$

4° Enfin pour n divisible par 32, $n = 2^\alpha m$, $\alpha > 4$, on a la formule unique

$$\mathrm{N} = 24\zeta_1(m),$$

si grand que α puisse devenir.