JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

Théorèmes concernant respectivement les nombres premiers de la forme $16\kappa + 3$ et les nombres premiers de la forme $16\kappa + 11$

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 6 (1861), p. 97-100.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1861_2_6__97_0>

THÉORÈMES

CONCERNANT

RESPECTIVEMENT LES NOMBRES PREMIERS DE LA FORME $16k + 3$ ET LES NOMBRES PREMIERS DE LA FORME $16k + 11$;

PAR M. J. LIOUVILLE.

---

1. La forme linéaire $8\mu + 3$ se décompose dans les deux suivantes $16k + 3$, $16k + 11$, au sujet desquelles nous voulons présenter deux théorèmes qui nous semblent curieux. Mais d'abord observons que pour tout nombre premier m de la forme $8\mu + 3$, on peut écrire (d'une seule manière) en nombres entiers:

$$m = a^2 + 2b^2.$$

Comme, d'ailleurs, a et b ne peuvent être qu'impairs, si l'on fait

$$\frac{a^2 - b^2}{8} = n,$$

le quotient n sera entier. Dans tout le cours de cet article, nous conserverons à m et à n la signification que nous venons de leur attribuer. Ainsi m désignera toujours un nombre premier $8\mu + 3$; mais nous supposerons successivement μ pair $(\mu = 2k)$, puis μ impair $(\mu = 2k + 1)$, ce qui donnera au nombre m les deux formes $16k + 3$, $16k + 11$, sans que les équations fondamentales

$$m = a^2 + 2b^2$$

et

$$n = \frac{a^2 - b^2}{8}$$

cessent d'avoir lieu. Ajoutons que nous n'aurons pas besoin de la valeur même de n, mais seulement de la valeur de n (mod. 2). Or il est clair que n est pair quand a et b sont tous les deux compris dans la formule $8\nu \pm 1$, ou tous les deux compris dans la formule $8\nu \pm 3$; au contraire n est impair quand un des deux entiers a, b appartient à la formule $8\nu \pm 1$ et l'autre à la formule $8\nu \pm 3$.

2. Commençons par les nombres premiers $16k+3$, et désignant par m un nombre donné de cette espèce, posons de toutes les manières possibles l'équation

$$m = (8t+3)^2 + 2p^{4l+1}y^2,$$

t désignant un entier indifféremment pair ou impair, positif, nul ou négatif, tandis que y et p sont impairs et positifs, de plus p premier (naturellement de la forme $4\nu + 1$) et non diviseur de y. On demande une règle facile qui dise à priori si le nombre N des décompositions de m sous la forme indiquée est pair ou impair.

Or je réponds à cette question par la congruence

$$N \equiv n \pmod{2},$$

le nombre n étant celui qu'on a défini plus haut.

Les valeurs successives de

$$(8t+3)^2,$$

où t est indifféremment pair ou impair, positif, nul ou négatif, sont

$$3^2,\ 5^2,\ 11^2,\ 13^2, \ldots;$$

d'après cela, on vérifiera aisément notre théorème sur les nombres premiers

$$3,\ 19,\ 67,\ 83, \ldots,$$

que la formule $16k+3$ fournit.

Bornons-nous aux quatre plus petits. On a

$$\begin{aligned} 3 &= 1^2 + 2.1^2, \\ 19 &= 1^2 + 2.3^2, \\ 67 &= 7^2 + 2.3^2, \\ 83 &= 9^2 + 2.1^2; \end{aligned}$$

n est donc pair pour le premier et le dernier d'entre eux, mais impair pour les deux autres. Or cela est vrai aussi de N. D'abord pour $m = 3$, on a évidemment $\mathrm{N} = 0$; mais pour $m = 19$, on a la décomposition canonique

$$19 = 3^2 + 2.5.1^2;$$

67 aussi en offre une, savoir

$$67 = 3^2 + 2.29.1^2.$$

Enfin pour $m = 83$, on retrouve N pair, $\mathrm{N} = 2$, les équations canoniques étant alors

$$83 = 3^2 + 2.37.1^2,$$
$$83 = 5^2 + 2.29.1^2.$$

Notre théorème a donc toujours lieu.

3. Passons aux nombres premiers $16k + 11$; et désignant par m un nombre donné de cette espèce, posons de toutes les manières possibles l'équation

$$m = (8t + 1)^2 + 2p^{4l+1}y^2,$$

où l'on prendra t indifféremment pair ou impair, positif, nul ou négatif, tandis que y et p seront impairs et positifs, de plus p premier (naturellement de la forme $4\nu + 1$) et non diviseur de y. Cette fois encore, il s'agit de décider si le nombre N des décompositions de m sous la forme indiquée est pair ou impair, et c'est encore par la congruence

$$\mathrm{N} \equiv n \pmod{2}$$

que je réponds à cette question.

Les valeurs successives de

$$(8t + 1)^2,$$

où t est indifféremment pair ou impair, positif, nul ou négatif, sont

$$1^2,\ 7^2,\ 9^2,\ 15^2, \ldots;$$

d'après cela, on vérifiera aisément notre théorème sur les nombres premiers

$$11, 43, 59, 107, \ldots,$$

que la formule $16k + 11$ fournit.

Bornons-nous aux quatre plus petits. On a

$$\begin{aligned} 11 &= 3^2 + 2.1^2, \\ 43 &= 5^2 + 2.3^2, \\ 59 &= 3^2 + 2.5^2, \\ 107 &= 3^2 + 2.7^2; \end{aligned}$$

n est donc impair pour 11 et 107, mais pair pour 43 et 59. Or il en est ainsi de N. En effet, on a pour 11 la décomposition canonique

$$11 = 1^2 + 2.5.1^2.$$

Mais pour 43, on n'en a aucune; et, pour 59, on en a deux

$$\begin{aligned} 59 &= 1^2 + 2.29.1^2, \\ 59 &= 7^2 + 2.5.1^2. \end{aligned}$$

Enfin pour $m = 107$, on retrouve N impair, $N = 3$, comme le montrent les équations

$$\begin{aligned} 107 &= 1^2 + 2.53.1^2, \\ 107 &= 7^2 + 2.29.1^2, \\ 107 &= 9^2 + 2.13.1^2. \end{aligned}$$

Notre théorème a donc toujours lieu.