JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

MAXIMILIEN MARIE

Nouvelle théorie des fonctions de variables imaginaires; troisième partie. De la marche des valeurs d'une fonction implicite définie par une équation algébrique

Journal de mathématiques pures et appliquées 2^e série, tome 6 (1861), p. 57-92.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1861_2_6__57_0>

NOUVELLE THÉORIE

DES

FONCTIONS DE VARIABLES IMAGINAIRES;

PAR M. MAXIMILIEN MARIE,
Ancien élève de l'École Polytechnique.

TROISIÈME PARTIE.

DE LA MARCHE DES VALEURS D'UNE FONCTION IMPLICITE DÉFINIE PAR UNE ÉQUATION ALGÉBRIQUE.
(Suite.)

CHAPITRE VII.

De la série de Taylor. (Suite.)

APPLICATIONS.

107. Soit d'abord l'équation

$$y^2 = 2px:$$

$x_0 = \alpha_0 + \beta_0\sqrt{-1}$ désignant l'abscisse du point de départ, et $x_1 = \alpha_1 + \beta_1\sqrt{-1}$ celle d'un point de la région de convergence, α_1 et β_1 devront satisfaire à la condition

$$(\alpha_1 - \alpha_0)^2 + (\beta_1 - \beta_0)^2 < \alpha_0^2 + \beta_0^2,$$

ou

$$\alpha_1^2 - 2\alpha_0\alpha_1 + \beta_1^2 - 2\beta_1\beta_0 < 0;$$

pour que le point mobile puisse passer sur la conjuguée dangereuse

$C = \infty$, il faudra donc que l'on puisse trouver des valeurs négatives de α, telles que

$$\alpha^2 - 2\alpha\alpha_0 < 0,$$

c'est-à-dire qu'il faudra que α_0 soit lui-même négatif.

Supposons d'abord α_0 positif : le point mobile n'ayant pu passer sur la conjuguée $C = \infty$, la caractéristique du point final aura le signe de celle du point initial ; et comme les caractéristiques de deux points ayant même abscisse sont toujours de signes contraires, il n'y aura aucun doute sur la valeur de y, qui se sera développée suivant la série.

Supposons maintenant α_0 négatif : le point mobile ne pourra pas dans ce cas passer sur la courbe réelle, car il n'existera pas de valeurs positives de α satisfaisant à l'inégalité

$$\alpha^2 - 2\alpha_0\alpha < 0;$$

β' ne pourra donc pas changer de signe ; et si β en a changé, dans le passage de x_0 à x_1, le point $[x, y]$ aura certainement traversé la conjuguée dangereuse, tandis que dans le cas contraire il ne l'aura pas traversée, ou l'aura traversée un nombre pair de fois, ce qui revient au même.

La caractéristique du point final aura donc, ou non, le signe de la caractéristique du point initial, suivant que β_0 et β_1 seront de même signe ou de signes contraires.

On construirait très-aisément, si on le voulait, la limite de la région de convergence : cette courbe passerait, dans tous les cas, par le point dangereux, et y toucherait la courbe réelle et la conjuguée $C = \infty$; elle n'aurait d'ailleurs que ce point commun, soit avec la courbe réelle, soit avec la conjuguée $C = \infty$, suivant que α_0 serait négatif ou positif. Dans le premier cas, les deux points d'une même conjuguée, situés sur la limite de la région de convergence, appartiendraient toujours à des branches inférieures ou supérieures, suivant que le point de départ $[x_0, y_0]$ serait lui-même sur une branche inférieure ou sur une branche supérieure ; dans le second, les points de la limite, pour lesquels β serait de même signe que β_0, appartiendraient à des branches de même nature que celle où se trouvait le point de départ, et les autres à des branches de nature contraire. Dans ce dernier cas, la région de convergence serait repliée sur elle-même.

108. Soit maintenant l'équation

$$a^2 y^2 + b^2 x^2 = a^2 b^2 :$$

ce sera le sommet de droite A, ou le sommet de gauche A', qui limitera la région de convergence, suivant que

$$\beta_0^2 + (\alpha_0 - a)^2 \lesseqgtr \beta_0^2 + (\alpha_0 + a)^2,$$

c'est-à-dire suivant que α_0 sera positif ou négatif.

Il est facile d'interpréter ce résultat :

La partie réelle de l'abscisse d'un point du lieu ne passe par zéro que lorsque le point lui-même passe sur la conjuguée $C = 0$, c'est-à-dire sur l'hyperbole qui touche l'ellipse en ses sommets B et B' placés sur l'axe des y. Du reste, il est évident que la partie imaginaire de x est positive ou négative suivant que le point appartient à une branche d'hyperbole tangente à l'ellipse en un point de l'arc BAB' ou en un point de l'arc BA'B'.

On voit donc que le point dangereux qui limite la région de convergence est toujours le sommet le plus proche du point où la branche de conjuguée, qui contient le point de départ, touche l'ellipse.

Supposons α_0 positif : le point $[x, y]$ pourra ou non passer sur la conjuguée dangereuse $C = \infty$, sans sortir de la région de convergence, suivant qu'on pourra ou non satisfaire à la condition

$$(\alpha - \alpha_0)^2 + \beta_0^2 < (\alpha_0 - a)^2 + \beta_0^2$$

par des valeurs positives de α plus grandes que a.

Cette condition se réduit à $\alpha_0 > a$; si donc α_0 est moindre que a, le point $[x, y]$ ne pouvant, sans sortir de la région de convergence, passer sur la conjuguée $C = \infty$, la caractéristique du point final aura le signe de la caractéristique du point initial ou un signe contraire, suivant que, dans l'intervalle, le point mobile n'aura pas ou aura traversé la conjuguée $C = 0$, c'est-à-dire suivant que α_1 et α_0 seront de même signe ou de signes contraires. Comme du reste les caractéristiques de deux points ayant même abscisse sont toujours de signes contraires, il ne restera aucun doute sur celle des valeurs de y qui se sera développée par la série de Taylor.

Si la valeur finale de x était réelle et moindre que a, les valeurs finales de y seraient aussi réelles, mais le point d'arrivée serait évidemment sur la branche d'ellipse qui contiendrait le point de contact de la branche d'hyperbole où se trouvait le point de départ.

Supposons maintenant $\alpha_0 > a$: pour que le point mobile $[x, y]$ pût passer sur la courbe réelle, il faudrait qu'on pût satisfaire à la condition

$$(\alpha - \alpha_0)^2 + \beta_0^2 < (\alpha_0 - a)^2 + \beta_0^2$$

au moyen de valeurs de α comprises entre $-a$ et $+a$; or cette condition se réduit à

$$(\alpha - a)(\alpha + a - 2\alpha_0) < 0,$$

elle ne peut donc être satisfaite; ainsi la limite de la région de convergence touchera seulement la courbe réelle au sommet A.

Dans ce cas de $\alpha_0 < a$, la caractéristique pourra changer de signe en passant par ∞ ou par 0, car le point $[x, y]$ pourra traverser la conjuguée $C = 0$ s'il existe pour β des valeurs satisfaisant à la condition

$$\alpha_0^2 + (\beta - \beta_0)^2 < (\alpha_0 - a)^2 + \beta_0^2,$$

ou

$$\beta^2 - 2\beta\beta_0 < a^2 - 2a\alpha_0.$$

Il n'y a à cette condition aucun empêchement général; par conséquent, suivant que $\alpha_1 \beta_1$ et $\alpha_0 \beta_0$ seront de même signe ou de signes contraires, les caractéristiques des deux points extrêmes seront aussi de même signe ou de signes contraires.

109. J'ai voulu, dans ce qui précède, pour plus de précision, déterminer le signe de la caractéristique du point d'arrivée; mais il est évident que la question ne l'exigeait pas, car deux points qui ont même abscisse, étant toujours séparés par la conjuguée dangereuse, il suffisait pour choisir la valeur finale de y de savoir si le point mobile, pendant son mouvement, avait ou non traversé cette conjuguée dangereuse.

J'abrégerai dans les exemples suivants.

L'équation

$$a^2 y^2 + b^2 x^2 = -a^2 b^2$$

se discutera comme la précédente ; cependant elle offrira quelques particularités nouvelles, parce que l'enveloppe des conjuguées ne sera plus réelle.

La région de convergence sera limitée au sommet de droite A, ou au sommet de gauche A' de l'enveloppe, selon que

$$\alpha_0^2 + (\beta_0 - a)^2 \lessgtr \alpha_0^2 + (\beta_0 + a)^2,$$

ou que β_0 sera positif ou négatif.

Or la partie imaginaire de l'abscisse d'un point du lieu ne passe par zéro que lorsque le point lui-même passe sur la conjuguée $C = \infty$ qui touche l'enveloppe en ses sommets placés sur l'axe des y : on conclut de là, comme dans le cas précédent, que le point dangereux qui limite la région de convergence est toujours le sommet le plus proche du point où la branche, qui contient le point de départ, touche l'enveloppe.

Supposons β_0 positif : le point $[x, y]$ pourra ou non passer sur la conjuguée dangereuse $C = 0$, suivant qu'on pourra ou non trouver pour β des valeurs positives et plus grandes que a, qui satisfassent à la condition

$$\alpha_0^2 + (\beta - \beta_0)^2 < \alpha_0^2 + (\beta_0 - a)^2.$$

Cette condition se réduit à

$$(\beta - a)(\beta + a - 2\beta_0) < 0;$$

le point mobile pourra donc ou non passer sur la conjuguée dangereuse, suivant que β_0 sera plus grand ou plus petit que a.

Au reste, on verrait, comme précédemment, que lorsque le point $[x, y]$ peut passer sur la conjuguée dangereuse $C = 0$, il ne peut parvenir à l'enveloppe et réciproquement, puisque la condition est la même dans les deux cas,

$$(\beta - a)(\beta + a - 2\beta_0) < 0,$$

mais avec les hypothèses contraires $\beta < a$ et $\beta > a$. D'un autre côté le point $[x, y]$ pourra ou non passer sur la conjuguée $C = \infty$, suivant qu'on pourra ou non trouver pour α des valeurs satisfaisant à la condition

$$(\alpha - \alpha_0)^2 + \beta_0^2 < \alpha_0^2 + (\beta_0 - a)^2,$$

ou

$$\alpha^2 - 2\alpha\alpha_0 < a^2 - 2a\beta_0.$$

Cela posé :

Si β_0 est plus grand que a, le point $[x, y]$ pourra passer sur la conjuguée dangereuse $C = 0$, et il y aura ou non passé, suivant que α_1 et α_0 seront de signes contraires ou de même signe; de même, il aura ou non traversé la conjuguée $C = \infty$, suivant que β_0 et β_1 seront de signes contraires ou de même signe; la caractéristique du point final sera donc de même signe que celle du point initial, ou aura un signe contraire, suivant que

$$\alpha_1 \alpha_0 \beta_1 \beta_0$$

sera positif ou négatif.

Si, au contraire, β_0 est moindre que a, suivant que β_1 et β_0 seront de signes contraires ou de même signe, le point $[x, y]$ aura ou non traversé la conjuguée $C = \infty$, de sorte que les caractéristiques du point initial et du point final seront alors de signes contraires ou de même signe; tandis que, suivant que α_1 et α_0 seront de signes contraires ou de même signe, le point mobile ayant ou non passé sur l'enveloppe, le point final et le point initial seront, sur leurs conjuguées respectives, de côtés opposés ou du même côté par rapport aux points où ces conjuguées touchent l'enveloppe, sans qu'il en puisse d'ailleurs résulter de changement de signe dans la caractéristique : ce serait la partie imaginaire de $\frac{dy}{dx}$ qui changerait de signe avec α, de sorte qu'on eût pu proposer de reconnaître, parmi les deux valeurs finales de y, celle qui se serait développée par la série de Taylor, au signe de la partie imaginaire de la valeur qu'elle devait faire prendre à $\frac{dy}{dx}$.

110. Prenons encore l'équation

$$a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2.$$

La région de convergence sera bornée au sommet de droite ou au sommet de gauche, suivant que

$$(\alpha_0 - a)^2 + \beta_0^2 \lessgtr (\alpha_0 + a)^2 + \beta_0^2,$$

c'est-à-dire suivant que α_0 sera positif ou négatif.

Or, quand on suit une même conjuguée en allant de droite à gauche, α est d'abord positif aux environs du point de contact de la conjuguée avec la branche droite de l'hyperbole ; il est négatif aux environs du point de contact de gauche, et il s'annule aux extrémités du diamètre conjugué de celui qui passe par les deux points de contact.

Sur quelque conjuguée que se trouve le point initial, le sommet où se trouve bornée la région de convergence est donc toujours celui qui appartient à la branche de l'hyperbole réelle qui passe par l'extrémité du quadrant (oblique) de conjuguée sur lequel se trouve le point initial.

111. S'il s'agissait de l'équation

$$a^2y^2 - b^2x^2 = a^2b^2,$$

les points dangereux seraient les sommets de l'enveloppe imaginaire des conjuguées.

La région de convergence serait limitée au sommet de droite ou au sommet de gauche suivant que

$$\alpha_0^2 + (\beta_0 - a)^2 \lessgtr \alpha_0^2 + (\beta_0 + a)^2,$$

ou que β_0 serait positif ou négatif.

Cette condition s'interpréterait comme dans le cas précédent.

On achèverait dans ces deux derniers exemples la détermination de la valeur finale de y comme dans les deux précédents.

112. L'équation

$$y^n = (a + x)^m,$$

qu'on ramène par une transformation de variables à

$$y^n = (1 + x)^m,$$

où l'on peut supposer que x parte de o, est, je crois, la seule qu'on ait jusqu'ici discutée au point de vue qui nous occupe.

Le point dangereux est $x = -1$, $y = 0$, de sorte que la seule conjuguée dangereuse est la conjuguée $C = \infty$: les branches de cette conjuguée sont représentées, du côté des x plus grands que -1 par les équations

$$y = \rho^{\frac{m}{n}}\left(\cos\frac{2k\pi}{n} + \sqrt{-1}\sin\frac{2k\pi}{n}\right)$$

et du côté des x moindres que -1 par

$$y = \rho^{\frac{m}{n}}\left(\cos\frac{(2k+1)\pi}{n} + \sqrt{-1}\sin\frac{(2k+1)\pi}{n}\right),$$

où ρ désigne $1 + x$ ou $-(1 + x)$ et où $\rho^{\frac{m}{n}}$ n'a qu'une valeur positive.

La théorie indique que, quelle que soit la position du point de départ $[x_0, y_0]$, la région de convergence ne pourra jamais couper qu'une seule des branches de la conjuguée dangereuse; d'un autre côté, tous les points correspondants à une même abscisse seront toujours séparés les uns des autres par une au moins de ces branches; par conséquent, si l'on savait quelle est la branche que peut couper la limite de la région de convergence, on saurait par là même dans quelle case se trouvera le point d'arrivée : il appartiendrait à la case qui contenait le point de départ, ou à la case voisine, entamée par la région de convergence, suivant que β_0 et β_1 seraient de même signe ou de signes contraires.

Or, en supposant à x_0 une valeur réelle o, et se donnant en outre la valeur initiale de y, on se donne par là même la branche de la conjuguée $C = \infty$ qui traverse la région de convergence : la question est donc résolue d'avance, il ne reste qu'à en donner la réponse en formule.

Pour cela posons

$$1 + x = \rho(\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi),$$

φ devant partir de o en même temps que x; il en résultera

$$y = \rho^{\frac{m}{n}}\left(\cos\frac{2k\pi + m\varphi}{n} + \sqrt{-1}\sin\frac{2k\pi + m\varphi}{n}\right).$$

S'il ne s'agissait pas de retrouver dans cette formule la valeur de y qui se développe par la série de Maclaurin, on pourrait y donner à φ et à ρ toutes les valeurs imaginables.

Mais en premier lieu, pour que la série soit convergente, il faudra que ρ reste compris entre o et 2, et d'un autre côté, la discussion précédente prouve qu'en raison de cette condition la valeur de la série reproduira bien de temps à autre la valeur de

$$\rho^{\frac{m}{n}}\left(\cos\frac{2k\pi}{n} + \sqrt{-1}\sin\frac{2k\pi}{n}\right),$$

dans laquelle k correspondrait à y_0 mais ne se rencontrera jamais même avec les valeurs voisines algébriquement

$$\rho^{\frac{m}{n}}\left(\cos\frac{(2k\pm 1)\pi}{n} + \sqrt{-1}\sin\frac{(2k\pm 1)\pi}{n}\right):$$

cela signifie évidemment que, pour que la formule

$$\rho^{\frac{m}{n}}\left(\cos\frac{2k\pi + m\varphi}{n} + \sqrt{-1}\sin\frac{2k\pi + m\varphi}{n}\right)$$

reproduise perpétuellement la valeur de la série, il faudra que $m\varphi$ reste toujours compris entre $+\pi$ et $-\pi$, c'est-à-dire que si $x = \alpha + \beta\sqrt{-1}$ est la valeur finale qu'on veut attribuer à x et qui devra être telle, que $\alpha^2 + \beta^2 < 1$, pour mettre d'accord les deux formules, il faudra toujours, après avoir tiré φ des équations

$$\sin\varphi = \frac{\beta}{\sqrt{(1+\alpha)^2 + \beta^2}}, \quad \cos\varphi = \frac{1+\alpha}{\sqrt{(1+\alpha)^2+\beta^2}},$$

réduire $m\varphi$, par l'addition ou la soustraction d'un nombre convenable de circonférences, à rentrer dans les limites

$$-\pi < m\varphi < +\pi.$$

113. L'équation

$$y = \mathrm{L}(1 + x)$$

donne lieu à une discussion analogue : le point dangereux a encore pour abscisse $x = 0$, de sorte que la conjuguée dangereuse est toujours la conjuguée $C = \infty$ dont les branches sont représentées, du côté des x plus grands que -1 par les équations

$$y = \mathrm{L}(1 + x) + 2k\pi\sqrt{-1},$$

et du côté des x moindres que -1 par

$$y = \mathrm{L}(-1 - x) + (2k + 1)\pi\sqrt{-1}.$$

Quel que soit le point de départ $[x_0, y_0]$, la région de convergence ne pourra jamais couper qu'une seule branche de la conjuguée dangereuse; d'un autre côté, si $x_0 = 0$ et $y_0 = 2k_0\pi\sqrt{-1}$, c'est la branche

$$y = \mathrm{L}(1 + x) + 2k_0\pi\sqrt{-1}$$

qui traversera la région de convergence : on sait donc d'avance que le point $[x_1, y_1]$ dont l'ordonnée serait fournie par la série de Maclaurin, supposée convergente, sera compris entre les branches

$$y = \mathrm{L}(1 + x) + 2k_0\pi\sqrt{-1}$$

d'une part, et

$$y = \mathrm{L}(1 + x) + (2k_0 \pm 2)\pi\sqrt{-1}$$

de l'autre. Ce qui fournit la solution géométrique de la question.

Pour en avoir la solution algébrique, posons

$$1 + x = \rho(\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi),$$

d'où

$$y = \mathrm{L}.\rho + \varphi\sqrt{-1}.$$

il est clair que, pour que cette formule reste constamment d'accord avec la série, il faudra que φ lui-même reste compris entre

$$(2k_0 + 1)\pi \quad \text{et} \quad (2k_0 - 1)\pi,$$

puisque sans cela, φ, variant d'une manière continue de sa valeur initiale $2k_0\pi$ à sa valeur finale, aurait pris momentanément l'une des valeurs

$$(2k_0 \pm 1)\pi,$$

ce qui eût amené le point $[x, y]$ sur l'une des branches

$$y = \mathrm{L}(-1 - x) + (2k_0 \pm 1)\pi\sqrt{-1}$$

que la région de convergence ne peut pas atteindre.

Le même procédé de démonstration s'étendrait sans peine aux fonctions

$$y = \int dx\sqrt{\frac{1 - x^2}{1 - e^2x^2}},$$

$$y = \int dx\frac{1}{\sqrt{(1 - x^2)(1 - e^2x^2)}},$$

et en général à toutes les intégrales périodiques.

114. Dans les exemples précédents, la région de convergence de la série était toujours limitée à celui des points dangereux dont l'abscisse, retranchée de celle du point de départ, fournissait la différence de plus petit module : il n'en sera plus de même dans les exemples qui vont suivre et qui par suite présenteront un intérêt nouveau.

Soit d'abord l'équation

$$y^3 - a^2y + a^2x = 0,$$

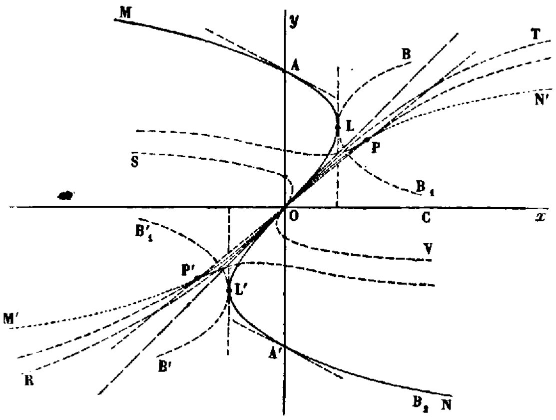
que nous avons déjà étudiée dans le chapitre VI.

Les points dangereux sont (*fig.* 7)

$$\mathrm{L}\left\{\begin{aligned} x &= \frac{2a}{3\sqrt{3}} \\ y &= \frac{a}{\sqrt{3}} \end{aligned}\right. \quad \text{et} \quad \mathrm{L}'\left\{\begin{aligned} x &= -\frac{2a}{3\sqrt{3}}, \\ y &= -\frac{a}{\sqrt{3}}. \end{aligned}\right.$$

les carrés des modules des différences des abscisses des deux points

Fig. 7.



dangereux retranchées successivement de celle d'un point quelconque du lieu,

$$\begin{cases} x = \alpha + \beta\sqrt{-1}, \\ y = \alpha' + \beta'\sqrt{-1}, \end{cases}$$

sont

$$\left(\alpha - \frac{2a}{3\sqrt{3}}\right)^2 + \beta^2 \quad \text{et} \quad \left(\alpha + \frac{2a}{3\sqrt{3}}\right)^2 + \beta^2$$

dont l'égalité n'exige que l'annulation de α.

Il semblerait donc que la région de convergence de la série dût passer à la fois aux deux points dangereux dès que l'abscisse du point de départ serait dépourvue de partie réelle; et que, par les mêmes motifs, la région de convergence fût limitée au point L si α_0 était positif et au point L' dans le cas contraire.

Mais ces conclusions sont le plus souvent démenties par les faits, car pour aller du point de départ à celui des deux points dangereux dont la distance modulaire serait la plus petite, il faut quelquefois ou passer d'abord par l'autre point dangereux, ou aller prendre passage, plus loin encore, sur la branche de conjuguée qui contient cet autre point.

C'est qu'en effet la formule que l'on possède de la condition de convergence, ne contenant que les parties réelles et imaginaires de la variable indépendante, à ses deux limites, tandis qu'elle devrait au moins contenir les parties qui composent la valeur initiale de la fonction, il serait imprudent de s'abandonner complétement aux indications qu'elle peut fournir; il faut l'appliquer seulement de proche en proche, avec précautions, et encore doit-on rejeter les conclusions où elle mènerait lorsque ces conclusions sont en contradiction évidente avec les faits.

Dans l'exemple qui nous occupé, α peut s'annuler dans des circonstances toutes différentes et où les conclusions à tirer ne sont en rien semblables.

α s'annule d'abord lorsque le point $[x,y]$ passe sur l'enveloppe imaginaire : dans ce cas on conçoit aisément que la région de convergence s'étende également jusqu'aux deux points dangereux; car, en vertu de l'inégalité

$$\beta_0^2 < \frac{4a^3}{27} + \beta_0'^2,$$

elle comprendra nécessairement l'origine : or si le point $[x,y]$ peut se rendre du point de départ $[\beta_0, \beta'_0]$ à l'origine, il aura ensuite le même chemin à faire pour aller soit à l'un, soit à l'autre des deux points dangereux.

Mais chacune des conjuguées dont la caractéristique surpasse $-\frac{1}{2}$ contient aussi deux points dont les abscisses manquent de partie réelle. Ces conjuguées touchent la courbe réelle sur les arcs AM et A'N; or il sera facile d'établir, ce qui d'ailleurs est pour ainsi dire évident, que si le point de départ appartient, par exemple, à une branche tangente à la courbe réelle en un point de l'arc AM, soit que la partie réelle de l'abscisse de ce point de départ soit d'ailleurs positive, nulle, ou négative, ce sera toujours le point L qui limitera la région de convergence, tandis que le point L' en sera séparé par un intervalle plus ou moins considérable.

Nous remarquerons encore, avant d'entrer dans les détails, que si le point de départ appartient à une conjuguée tangente à l'enveloppe imaginaire, la partie imaginaire de son abscisse sera positive ou négative selon que le point de contact, avec l'enveloppe, de la demi-conjuguée où se trouvera ce point de départ, appartiendra à la branche ON' ou à la branche OM'; et que si ce contact a lieu, par exemple, sur ON', la partie réelle de l'abscisse du point de départ sera positive ou négative, selon que la branche qui contiendra le point de départ s'éloignera du point de contact vers la droite ou vers la gauche.

Cela posé, prenons d'abord pour point de départ un point d'une demi-conjuguée tangente à la courbe réelle en un point de l'arc LM : pour parvenir au point L', il faudrait que le point $[x,y]$ passât d'abord sur la demi-conjuguée qui touche la courbe réelle en L : mais si l'on compare les carrés des modules des différences des abscisses du point L et d'un point de la conjuguée qui y passe, retranchées successivement de l'abscisse du point de départ, on voit que de ces deux carrés

$$\left(\alpha_0 - \frac{2a}{3\sqrt{3}}\right)^2 + \beta_0^2,$$

$$\left(\alpha_0 - \frac{2a}{3\sqrt{3}} - h\right)^2 + \beta_0^2,$$

le premier est inférieur au second, dès que α_0 n'atteint pas $\frac{2a}{3\sqrt{3}}$, puisque h est supposé positif.

Ainsi, il ne serait pas même nécessaire que α_0 fût négatif; il suffirait qu'il fût moindre que $\frac{2a}{3\sqrt{3}}$ pour que le point $[x,y]$, bien loin de pouvoir atteindre au point L', ne pût même pas passer sur la conjuguée qui touche la courbe réelle au point dangereux L.

Tant donc que la demi-conjuguée passant par le point de départ touchera la courbe réelle en un point de l'arc LM, la région de convergence sera limitée au point L : si α_0 est moindre que $\frac{2a}{3\sqrt{3}}$, le point $[x,y]$ ne pourra pas passer sur la conjuguée qui touche la courbe réelle en L, tandis que si α_0 surpasse $\frac{2a}{3\sqrt{3}}$, le point $[x,y]$ au contraire ne pourra pas passer sur la courbe réelle.

Dans le premier cas, le point d'arrivée appartiendra encore à une demi-conjuguée tangente à la courbe réelle en un point de l'arc LM;

et les deux points de départ et d'arrivée seront sur leurs conjuguées respectives placés, par rapport aux points de contacts de ces conjuguées avec la courbe réelle, du même côté, ou de côtés opposés, suivant que $\beta_1 \beta_0$ sera positif ou négatif, parce que si β a passé par zéro dans l'intervalle, à ce moment le point $[x, y]$ aura changé de branche sur la conjuguée qui le contenait.

Dans le second cas, où α_0 surpasserait $\frac{2a}{3\sqrt{3}}$, le point $[x, y]$ ne pourra pas atteindre la courbe réelle, mais il pourra traverser la demi-conjuguée qui passe au point L, sur sa branche supérieure ou sa branche inférieure, suivant que β_0 sera positif ou négatif; et il l'aura traversée en effet si $\beta_1 \beta_0$ est négatif, tandis que si au contraire $\beta_1 \beta_0$ est positif, le point de contact, avec la courbe réelle de la branche de conjuguée à laquelle appartiendra le point d'arrivée, sera resté sur l'arc ML.

Lorsque le point $[x, y]$ aura traversé la conjuguée $C = \infty$, le point de contact avec la courbe réelle de la branche de conjuguée à laquelle appartiendra le point d'arrivée, sera sur l'arc LO, ou bien cette branche de conjuguée ne touchera plus la courbe réelle.

Dans cette dernière hypothèse, le point $[x, y]$ aurait traversé la conjuguée $C = 1$, en un point de la branche TOV, sur l'arc OT, si β_0 était positif, et sur OV dans le cas contraire.

La conjuguée $C = 1$ est fournie par les équations

$$\alpha'^3 - 3\alpha'\beta^2 - a^2\alpha' + a^2\alpha = 0$$

et

$$3\alpha'^2 = \beta^2,$$

d'où l'on tire

$$\alpha = \pm\left(\frac{8\beta^3}{3a^2\sqrt{3}} + \frac{\beta}{\sqrt{3}}\right),$$

le signe + convenant à l'arc ROT et le signe − à SOV, car sur OT, α et β sont positifs, sur OV, α est positif et β négatif, sur OS, α est négatif et β positif, enfin sur OR, α et β sont négatifs.

Comme aucune des conjuguées circonscrites à l'enveloppe imaginaire, excepté la conjuguée $C = 1$, ne coupe l'axe des x, car les équations

$$\begin{aligned} \alpha'^3 - 3\alpha'\beta^2 C^2 - \alpha^2\alpha' + a^2\alpha &= 0, \\ 3\alpha'^2\beta C - \beta^3 C^3 - a^2\beta C + a^2\beta &= 0, \\ \alpha' + \beta C &= 0, \end{aligned}$$

donnent

$$\beta = \pm a\sqrt{\frac{C-1}{2C^3}}.$$

Il en résulte que les deux arcs OS et OT sont les limites respectives des branches de gauche et de droite d'une conjuguée tangente à l'enveloppe imaginaire en un point situé sur ON', à une distance infiniment petite du point O; et que de même OV et OR sont les limites des branches de droite et de gauche d'une conjuguée tangente à l'enveloppe imaginaire en un point situé sur OM' à une distance infiniment petite du point O.

On conclut de là et de ce que, dans l'hypothèse où nous raisonnons, $\alpha_0 > \frac{2a}{3\sqrt{3}}$, le point $[x, y]$ ne pouvant passer sur la courbe réelle, ne peut non plus changer de branche sur la conjuguée où il se trouve : que si le point de départ appartient à une branche supérieure le point mobile ne pourra traverser la conjuguée $C = 1$ qu'en un point de OT, ce qu'on reconnaîtra à l'inégalité

$$\left(\alpha_0 - \frac{8\beta_0^3}{3a^2\sqrt{3}} - \frac{\beta_0}{\sqrt{3}}\right)\left(\alpha_1 - \frac{8\beta_1^3}{3a^2\sqrt{3}} - \frac{\beta_1}{\sqrt{3}}\right) < 0,$$

auquel cas le point d'arrivée appartiendra à une conjuguée tangente à l'enveloppe imaginaire en un point de ON'; et qu'au contraire, si le point de départ appartient à une branche inférieure, le point $[x, y]$ ne pourra traverser la conjuguée $C = 1$ qu'en un point de OV, ce qu'on reconnaîtra à l'inégalité

$$\left(\alpha_0 + \frac{8\beta_0^3}{3a^2\sqrt{3}} + \frac{\beta_0}{\sqrt{3}}\right)\left(\alpha_1 + \frac{8\beta_1^3}{3a^2\sqrt{3}} + \frac{\beta_1}{\sqrt{3}}\right) < 0,$$

auquel cas le point d'arrivée appartiendra à une branche de conjuguée tangente à l'enveloppe imaginaire en un point de OM'.

Au reste la condition de convergence

$$(\alpha - \alpha_0)^2 + (\beta - \beta_0)^2 < \left(\alpha_0 - \frac{2a}{3\sqrt{3}}\right)^2 + \beta_0^2$$

se réduisant à

$$\alpha_0^2 + (\beta - \beta_0)^2 < \left(\alpha_0 - \frac{2a}{3\sqrt{3}}\right)^2 + \beta_0^2,$$

pour un point de l'enveloppe imaginaire, cette inégalité ne pourra pas être satisfaite, dans le cas où nous sommes, puisque α_0 étant plus grand que $\frac{2a}{3\sqrt{3}}$, α_0^2 sera déjà plus grand que $\left(\alpha_0 - \frac{2a}{3\sqrt{3}}\right)^2$ et que d'un autre côté le point $[x, y]$ ayant traversé la conjuguée $C = \infty$, β et β_0 seraient de signes contraires, ce qui rendrait $(\beta - \beta_0)^2$ plus grand aussi que β_0^2.

Ainsi tant que le point de départ appartiendra à une branche de conjuguée tangente à la courbe réelle en un point de ML, le point $[x, y]$ ne pourra pas atteindre l'enveloppe imaginaire des conjuguées.

Supposons maintenant que le point de départ appartienne à une branche de conjuguée tangente à la courbe réelle en un point de l'arc LO.

La condition de convergence

$$(\alpha - \alpha_0)^2 + (\beta - \beta_0)^2 < \left(\alpha_0 - \frac{2a}{3\sqrt{3}}\right)^2 + \beta_0^2$$

se réduisant à

$$\left(\alpha - \frac{2a}{3\sqrt{3}}\right)\left(\alpha + \frac{2a}{3\sqrt{3}} - 2\alpha_0\right) < 0$$

lorsqu'on y fait $\beta = 0$, on voit que le point $[x, y]$ pourra passer sur la conjuguée $C = \infty$, qui a son contact en L, sans pouvoir atteindre la courbe réelle, ou inversement, suivant que α_0 sera plus grand ou plus petit que $\frac{2a}{3\sqrt{3}}$.

Dans le cas où α_0 serait plus grand que $\frac{2a}{3\sqrt{3}}$, le point $[x, y]$ aurait retraversé la conjuguée $C = \infty$ si β, β_0 avait le signe $-$; mais ce cas n'offre plus aucun intérêt.

Que α_0 soit plus grand ou plus petit que $\frac{2a}{3\sqrt{3}}$, le point $[x, y]$ pourra occasionnellement traverser la conjuguée $C = 1$, et il l'aura traversée en effet si

$$\left[\alpha_0^2 - \left(\frac{8\beta_0^3}{3a^2\sqrt{3}} + \frac{\beta_0}{\sqrt{3}}\right)^2\right]\left[\alpha_1^2 - \left(\frac{8\beta_1^3}{3a^2\sqrt{3}} + \frac{\beta_1}{\sqrt{3}}\right)^2\right]$$

est négatif.

Il pourra même atteindre l'enveloppe imaginaire des conjuguées si la distance modulaire

$$\sqrt{\left(\alpha_0 - \frac{2a}{3\sqrt{3}}\right)^2 + \beta_0^2}$$

est assez considérable.

Car β et β_0 devant être maintenant de même signe, l'inégalité

$$\alpha_0^2 + (\beta - \beta_0)^2 < \left(\alpha_0 - \frac{2a}{3\sqrt{3}}\right)^2 + \beta_0^2$$

ou

$$\beta^2 - 2\beta\beta_0 + \frac{4a\alpha_0}{3\sqrt{3}} - \frac{4a^2}{27} < 0$$

ne présenterait d'impossibilité qu'autant que

$$\beta_0^2 - \frac{4a\alpha_0}{3\sqrt{3}} + \frac{4a^2}{27}$$

serait négatif; c'est-à-dire que

$$\beta_0^2 + \left(\alpha_0 - \frac{2a}{3\sqrt{3}}\right)^2 < \alpha_0^2,$$

de sorte que

$$\beta_0^2 + \left(\alpha_0 - \frac{2a}{3\sqrt{3}}\right)^2 - \alpha_0^2 = 0$$

serait l'équation du lieu qui séparerait les points pour lesquels la région de convergence n'atteindrait pas l'enveloppe imaginaire, de ceux au contraire d'où la série pourrait rayonner au delà de cette enveloppe.

Au reste l'enveloppe imaginaire des conjuguées étant caractérisée par la condition

$$\alpha = 0,$$

le signe de $\alpha_0\,\alpha_1$ indiquera toujours si le point $[x, y]$ a ou non passé sur cette enveloppe.

Supposons donc $\alpha_0 < \frac{2a}{3\sqrt{3}}$, pour que le point $[x, y]$ puisse passer sur la courbe réelle.

Ce cas se subdivisera en deux autres suivant que α_0 sera plus grand ou plus petit que $\frac{a}{3\sqrt{3}}$. Dans la première hypothèse, en effet, le chemin du point $[x, y]$ ne pourra rencontrer la courbe réelle qu'en un point de l'arc OL, tandis que dans le cas contraire il pourrait la rencontrer sur l'arc OL'.

En effet, la condition de convergence, pour un point de la courbe réelle, se réduisant à

$$(\alpha - \alpha_0)^2 + \beta_0^2 < \left(\alpha_0 - \frac{2a}{3\sqrt{3}}\right)^2 + \beta_0^2$$

ou

$$\left(\alpha - \frac{2a}{3\sqrt{3}}\right)\left(\alpha + \frac{2a}{3\sqrt{3}} - 2\alpha_0\right) < 0,$$

elle ne pourra être satisfaite par une valeur négative de α qu'autant que α_0 sera moindre que $\frac{a}{3\sqrt{3}}$.

Supposons d'abord $\alpha_0 > \frac{a}{3\sqrt{3}}$. Dans ce cas si le point $[x, y]$ passe sur la courbe réelle, ce qu'on reconnaîtra au caractère

$$\beta_0\,\beta_1 < 0,$$

il reviendra sur des conjuguées tangentes à la branche OL, si

$$\left[\alpha_0^2 - \left(\frac{8\beta_0^3}{3a^2\sqrt{3}} + \frac{\beta_0}{\sqrt{3}}\right)^2\right]\left[\alpha_1^2 - \left(\frac{8\beta_1^3}{3a^2\sqrt{3}} + \frac{\beta_1}{\sqrt{3}}\right)^2\right] > 0 :$$

dans le cas contraire il aura traversé la conjuguée $C = 1$ et se sera transporté sur une conjuguée tangente à l'enveloppe imaginaire.

Si au contraire α_0 est moindre que $\frac{a}{3\sqrt{3}}$, le point $[x, y]$ avant d'arriver à la branche OL', aura dû passer sur l'enveloppe imaginaire des conjuguées pour que α ait pu changer de signe. De sorte que si $\alpha_1\,\alpha_0$ avait le signe $+$, le point $[x, y]$ n'aurait pas passé sur la branche OL'.

On pourrait maintenant placer le point de départ sur une conjuguée tangente à l'enveloppe imaginaire en un point de l'arc ON'.

Mais il serait inutile de reprendre en détail l'analyse des faits dans cette hypothèse : nous venons de passer des conjuguées d'une catégorie à celles de l'autre, on effectuerait aussi aisément le passage inverse.

115. Nous étudierons en dernier lieu l'équation

$$y^3 - 3axy + x^3 = 0,$$

dont l'exemple, par les difficultés qu'il semblerait devoir présenter, fournira un contrôle suffisant de la méthode.

L'origine est un point double où les deux tangentes sont distinctes; mais comme l'une d'elles se confond avec l'axe des y, ce point pourra dans certains cas borner la région de convergence.

La dérivée de y, par rapport à x, redevient infinie aux points

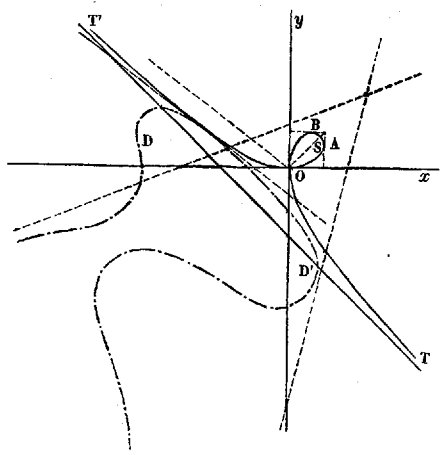
$$\begin{cases} x = a\sqrt[3]{4}, \\ y = a\sqrt[3]{2}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = a\sqrt[3]{4}\,\dfrac{-1-\sqrt{3}\sqrt{-1}}{2}, \\ y = a\sqrt[3]{2}\,\dfrac{-1+\sqrt{3}\sqrt{-1}}{2}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = a\sqrt[3]{4}\,\dfrac{-1+\sqrt{3}\sqrt{-1}}{2}, \\ y = a\sqrt[3]{2}\,\dfrac{-1-\sqrt{3}\sqrt{-1}}{2}. \end{cases}$$

Ces trois points A, D, D′ (*fig* 8) sont encore des points dangereux.

Fig. 8.



Toutes les conjuguées touchent la courbe réelle; leur enveloppe imaginaire ne jouera dans la discussion qu'un rôle très-secondaire.

La courbe a pour asymptotes les droites

$$y = -x - a,$$

$$y = \frac{1 - \sqrt{3}\sqrt{-1}}{2}x + \frac{2a}{1 - \sqrt{3}\sqrt{-1}},$$

$$y = \frac{1 + \sqrt{3}\sqrt{-1}}{2}x + \frac{2a}{1 + \sqrt{3}\sqrt{-1}}.$$

La caractéristique commune des points dangereux imaginaires est $-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$, celle des points dangereux réels est infinie.

Outre la courbe réelle, la figure représente la partie de la conjuguée $C = -\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ qui contient les points dangereux imaginaires; cette conjuguée a été construite avec soin par M. J. Fontès, candidat à l'École Polytechnique.

Supposons d'abord le point de départ situé sur une branche de conjuguée tangente à l'arc OT de la courbe réelle; la région de convergence sera alors limitée au point O : en effet, si α_0 est positif, le point $[x, y]$ ne pourra même pas atteindre la portion de la conjuguée $C = \infty$ qui touche la courbe réelle à l'origine, car l'inégalité

$$(\alpha - \alpha_0)^2 + \beta_0^2 < \alpha_0^2 + \beta_0^2,$$

ne pouvant être satisfaite par aucune valeur négative de α, si le point $[x, y]$ pouvait se rendre sur la portion de la conjuguée $C = \infty$ dont nous parlons, il pourrait à plus forte raison passer à l'origine en suivant un chemin tangent à l'axe des y, ce qui n'est possible en aucun cas.

D'un autre côté si α_0 est négatif, l'inégalité

$$\alpha_0^2 + \beta_0^2 < (\alpha_0 - a\sqrt[3]{4})^2 + \beta_0^2$$

suffit pour montrer que le point A sera certainement au dehors de la région de convergence, que par conséquent le point $[x, y]$ ne pourra atteindre la portion de la conjuguée $C = \infty$ qui touche la courbe réelle en A, et que, à plus forte raison, il restera bien éloigné de la branche de la conjuguée $C = -\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ qui contient les points dangereux imaginaires.

Cela posé, si α_0 est positif, le point $[x, y]$ pourra passer sur la courbe réelle et il y aura passé en effet, si $\beta_1 \beta_0$ est négatif; mais la caractéristique du point final sera restée en tout cas négative et moindre que -1.

Au contraire si α_0 est négatif, le point $[x, y]$ pourra passer sur la portion de la conjuguée $C = \infty$ qui touche la courbe réelle à l'origine; il y aura passé en effet si $\beta_1 \beta_0$ est négatif, et dans ce cas la caractéristique du point d'arrivée sera devenue positive; tandis que, si $\beta_1 \beta_0$ est positif, cette caractéristique sera restée négative et moindre que -1.

Plaçons maintenant le point de départ sur une branche de conjuguée tangente à la courbe réelle en un point de l'arc OBSA.

La région de convergence restera limitée à l'origine tant que $\alpha_0^2 + \beta_0^2$ sera moindre que $(\alpha_0 - a\sqrt[3]{4})^2 + \beta_0^2$, c'est-à-dire tant que α_0 ne surpassera pas $\frac{a}{\sqrt[3]{2}}$, ce qui ne saurait évidemment arriver sur une conjuguée très-voisine de celle qui passe par l'origine avec une caractéristique infinie.

Ainsi le point de départ marchant toujours dans le même sens, la région de convergence restera d'abord, et pendant un certain temps, limitée à l'origine.

On pourrait évidemment préciser davantage, si on le voulait.

Le point de départ étant choisi de manière que la région de convergence reste limitée à l'origine : si α_0 est négatif, le point $[x, y]$ pourra passer sur la branche de la conjuguée $C = \infty$ qui touche la courbe réelle à l'origine, mais il ne pourra atteindre la courbe réelle ; dans le cas contraire il pourra passer sur la courbe réelle, mais non sur la conjuguée $C = \infty$.

D'un autre côté la conjuguée $C = 0$, qui touche la courbe réelle au point B, étant définie par les équations

$$y^3 - 3a\alpha y + \alpha^3 - 3\alpha\beta^2 = 0, \quad -3ay + 3\alpha^2 - \beta^2 = 0.$$

d'où l'on tire par l'élimination de y

$$\left(\frac{3\alpha^2 - \beta^2}{3a}\right)^3 - 2\alpha(\alpha^2 + \beta^2) = 0,$$

suivant que

$$\left[\left(\frac{3\alpha_0^2 - \beta_0^2}{3a}\right)^3 - 2\alpha_0(\alpha_0^2 + \beta_0^2)\right]\left[\left(\frac{3\alpha_1^2 - \beta_1^2}{3a}\right)^3 - 2\alpha_1(\alpha_1^2 + \beta_1^2)\right]$$

sera positif ou négatif, le point $[x, y]$ n'aura pas, ou aura passé sur cette conjuguée $C = 0$.

Cela posé, on peut distinguer les deux cas où le point de départ se trouverait entre les deux portions des conjuguées $C = \infty$, $C = 0$, qui nous occupent, ou au delà de la conjuguée $C = 0$.

Dans le premier cas, et si d'ailleurs α_0 est négatif, suivant que $\beta_1\beta_0$ aura le signe $-$ ou le signe $+$, le point d'arrivée appartiendra à une portion de conjuguée tangente à la courbe réelle, en un point de l'arc ASBOT, situé au-dessous ou au-dessus de l'origine. Si donc $\beta_1\beta_0$ a le signe $-$, le point $[x, y]$ n'aura pas passé sur la conjuguée $C = 0$, ou y aura passé un nombre pair de fois, ce qui revient au même, et la caractéristique du point d'arrivée sera négative; mais si $\beta_1\beta_0$ a le signe $+$, le point $[x, y]$ n'aura pas traversé la conjuguée $C = \infty$, ou l'aura traversée un nombre pair de fois, ce qui revient au même, et la caractéristique du point d'arrivée sera positive ou négative suivant que

$$\left[\left(\frac{3\alpha_0^2 - \beta_0^2}{3a}\right)^3 - 2\alpha_0(\alpha_0^2 + \beta_0^2)\right]\left[\left(\frac{3\alpha_1^2 - \beta_1^2}{3a}\right)^3 - 2\alpha_1(\alpha_1^2 + \beta_1^2)\right]$$

sera positif ou négatif.

Si au contraire α_0 était positif, le point $[x, y]$ ne pouvant plus passer sur la conjuguée $C = \infty$, la caractéristique du point d'arrivée serait positive ou négative suivant que

$$\left[\left(\frac{3\alpha_0^2 - \beta_0^2}{3a}\right)^3 - 2\alpha_0(\alpha_0^2 + \beta_0^2)\right]\left[\left(\frac{3\alpha_1^2 - \beta_1^2}{3a}\right)^3 - 2\alpha_1(\alpha_1^2 + \beta_1^2)\right]$$

serait positif ou négatif; et comme d'ailleurs le point (x, y) aura ou non passé sur la courbe réelle, suivant que $\beta_1\beta_0$ aura le signe $-$ ou le signe $+$: si $\beta_1\beta_0$ est négatif, le point d'arrivée sera sur une branche de conjuguée dirigée à droite ou à gauche, si le point de départ appartenait à une branche dirigée à gauche ou à droite, et inversement, si $\beta_1\beta_0$ a le signe $+$.

Dans le second cas, où le point de départ se trouverait au delà de la conjuguée $C = 0$, si α_0 est négatif, la caractéristique du point d'arrivée sera négative ou positive suivant que

$$\beta_1\beta_0\left[\left(\frac{3\alpha_0^2 - \beta_0^2}{3a}\right)^3 - 2\alpha_0(\alpha_0^2 + \beta_0^2)\right]\left[\left(\frac{3\alpha_1^2 - \beta_1^2}{3a}\right)^3 - 2\alpha_1(\alpha_1^2 + \beta_1^2)\right]$$

sera positif ou négatif, car il n'aura traversé ni la conjuguée $C = 0$ ni à plus forte raison la conjuguée $C = \infty$, si

$$\left[\left(\frac{3\alpha_0^2 - \beta_0^2}{3a}\right)^3 - 2\alpha_0(\alpha_0^2 + \beta_0^2)\right]\left[\left(\frac{3\alpha_1^2 - \beta_1^2}{3a}\right)^3 - 2\alpha_1(\alpha_1^2 + \beta_1^2)\right]$$

a le signe $+$; il aura seulement traversé la conjuguée $C = 0$, si

$$\left[\left(\frac{3\alpha_0^2 - \beta_0^2}{3a}\right)^3 - 2\alpha_0(\alpha_0^2 - \beta_0^2)\right]\left[\left(\frac{3\alpha_1^2 - \beta_1^2}{3a}\right)^3 - 2\alpha_1(\alpha_1^2 + \beta_1^2)\right]$$

a le signe $-$, $\beta_1 \beta_0$ ayant au contraire le signe $+$; enfin il aura traversé les deux conjuguées si les deux produits ont chacun le signe $-$.

Si α_0 est au contraire positif, le point $[x, y]$ ne pouvant passer sur la conjuguée $C = \infty$, la caractéristique du point d'arrivée sera négative ou positive suivant que

$$\left[\left(\frac{3\alpha_0^2 - \beta_0^2}{3a}\right)^3 - 2\alpha_0(\alpha_0^2 + \beta_0^2)\right]\left[\left(\frac{3\alpha_1^2 - \beta_1^2}{3a}\right)^3 - 2\alpha_1(\alpha_1^2 + \beta_1^2)\right]$$

sera positif ou négatif : d'ailleurs si $\beta_1 \beta_0$ est négatif, le point d'arrivée appartiendra à une branche dirigée vers la droite ou vers la gauche, si le point de départ se trouvait sur une branche dirigée à gauche ou à droite, et inversement si $\beta_1 \beta_0$ a le signe $+$.

Supposons maintenant le point de départ placé toujours sur une branche de conjuguée tangente à la courbe réelle en un point de l'arc OBSA, mais avec la circonstance

$$\alpha_0 > \frac{a}{\sqrt[3]{2}}.$$

Le point $[x, y]$ ne pourra passer sur la portion de la conjuguée $C = \infty$ qui touche la courbe réelle en A que si l'on peut satisfaire à l'inégalité

$$(\alpha - \alpha_0)^2 + \beta_0^2 < (\alpha_0 - a\sqrt[3]{4})^2 + \beta_0^2$$

par des valeurs de α dépassant $+ a\sqrt[3]{4}$: or cette inégalité se réduit à

$$\alpha^2 - 2\alpha_0\alpha + 2a\alpha_0\sqrt[3]{4} - 2a^2\sqrt[3]{2} < 0,$$

et exige que α reste compris entre

$$2\alpha_0 - a\sqrt[3]{4} \quad \text{et} \quad a\sqrt[3]{4}:$$

comme nous supposons $\alpha_0 > \frac{a}{\sqrt[3]{2}}$, $2\alpha_0 - a\sqrt[3]{4}$ sera positif. Mais il reste cependant à distinguer deux cas :

$$2\alpha_0 - a\sqrt[3]{4} < a\sqrt[3]{4} \quad \text{et} \quad 2\alpha_0 - a\sqrt[3]{4} > a\sqrt[3]{4},$$

c'est-à-dire

$$\alpha_0 < a\sqrt[3]{4} \quad \text{et} \quad \alpha_0 > a\sqrt[3]{4};$$

dans le premier en effet, pour satisfaire à l'inégalité

$$(\alpha - \alpha_0)^2 + \beta_0^2 < (\alpha_0 - a\sqrt[3]{4})^2 + \beta_0^2,$$

il faudrait que α restât moindre que $a\sqrt[3]{4}$, ce qui veut dire que le point $[x, y]$ ne pourrait pas atteindre la portion de la conjuguée $C = \infty$ qui touche la courbe réelle en A; tandis que dans le second cas, pour satisfaire à la même inégalité, il faudrait que α restât plus grand que $a\sqrt[3]{4}$, ce qui signifie que le point $[x, y]$ ne pourrait plus revenir à la courbe réelle.

Supposons $\alpha_0 < a\sqrt[3]{4}$, le point $[x, y]$ ne pouvant dans ce cas passer sur la portion de la conjuguée $C = \infty$ qui touche la courbe réelle en A, ne pourra, à plus forte raison, atteindre la conjuguée $C = -\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$; par conséquent, la région de convergence sera bien limitée au point A.

Quelque part qu'on plaçât le point de départ, on saurait, dans cette hypothèse, comme précédemment, quel serait le signe de la caractéristique du point d'arrivée, et sur quelle branche ce point se trouverait.

Je passe donc au cas où α_0 dépasserait $a\sqrt[3]{4}$. Le point $[x, y]$ pouvant alors traverser la portion de la conjuguée $C = \infty$ qui touche la courbe réelle au point A, on ne voit pas tout d'abord pourquoi il ne pourrait pas atteindre la portion de la conjuguée $C = -\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ qui contient les points dangereux imaginaires; c'est-à-dire qu'on ne voit pas tout d'abord auquel des trois points A, D, D' la région de convergence de la série sera limitée. A la vérité, ce serait incontestablement au point A, si

$$(\alpha_0 - a\sqrt[3]{4})^2 + \beta_0^2$$

se trouvait à la fois moindre que

$$\left(\alpha_0 + \frac{a\sqrt[3]{4}}{2}\right)^2 + \left(\beta_0 + \frac{a\sqrt[3]{4}\sqrt[2]{3}}{2}\right)^2,$$

et que

$$\left(\alpha_0 + \frac{a\sqrt[3]{4}}{2}\right)^2 + \left(\beta_0 + \frac{a\sqrt[3]{4}\sqrt[2]{3}}{2}\right)^2;$$

inégalités qui se réduisent à

$$\alpha_0\sqrt{3} + \beta_0 > 0$$

et

$$\alpha_0\sqrt[3]{3} - \beta_0 > 0;$$

mais elles ne seraient satisfaites ni l'une ni l'autre, que la région de convergence n'en serait pas moins encore bornée au point A, laissant à l'écart les points D et D' à des distances plus ou moins considérables.

En effet, imaginons que nous revenions à l'un des points qui, ayant son abscisse définie par les équations

$$\alpha_0 = a\sqrt[3]{4}, \quad a\sqrt[3]{4}\sqrt[2]{3} \pm \beta_0 = 0,$$

appartiendrait d'ailleurs à une portion de conjuguée tangente à la courbe réelle en un point de l'arc OBSA.

Il est acquis que si nous diminuions infiniment peu α_0, sans faire varier β_0, la région de convergence n'atteindrait même plus alors la portion de la conjuguée $C = \infty$ qui passe en A; comment pourrait-on donc concevoir que si, au contraire, on augmentait infiniment peu α_0, la région de convergence prît instantanément un développement qui en portât la limite au delà de l'un des points D ou D'?

Au reste, les deux conditions

$$\alpha_0\sqrt{3} \pm \beta_0 > 0$$

sont pleinement remplies lorsque le point de départ appartient à la portion de la conjuguée $C = \infty$ qui touche la courbe réelle en A; comment pourrait-on donc concevoir que la région de convergence limitée précédemment en A, lorsque α_0 était compris entre $\frac{a}{\sqrt{2}}$ et $a\sqrt[3]{4}$, le point de départ appartenant alors à une branche de conjuguée tangente à la courbe réelle en un point de l'arc OBSA, et restant encore limitée au même point lorsque le point de départ vient se placer sur la portion de la conjuguée $C = \infty$ qui touche la courbe réelle en A, eût pu dans l'intervalle s'étendre jusqu'à l'un des deux points D ou D' qu'elle aurait au contraire dû toujours tendre à absorber en enveloppant une portion de plus en plus grande de l'espace répandu autour d'eux?

Les choses ne se passent jamais d'une façon à ce point extraordinaire; et quant au fait même qui nous occupe, il trouvera une explication bien simple dans l'observation suivante : à chacune des valeurs particulières de x,

$$a\sqrt[3]{4}\,\frac{-1-\sqrt{3}\sqrt{-1}}{2},\quad a\sqrt[3]{4}\,\frac{-1+\sqrt{3}\sqrt{-1}}{2},$$

il correspond, pour y, les valeurs doubles

$$a\sqrt[3]{2}\,\frac{-1+\sqrt{3}\sqrt{-1}}{2},\quad a\sqrt[3]{2}\,\frac{-1-\sqrt{3}\sqrt{-1}}{2},$$

qui sont les ordonnées des points dangereux D et D', et des valeurs simples

$$a\sqrt[3]{2}\,(1-\sqrt{3}\sqrt{-1}),\quad a\sqrt[3]{2}\,(1+\sqrt{3}\sqrt{1}),$$

qui sont les ordonnées de points ne présentant aucune particularité remarquable. Or ce n'est évidemment qu'à l'un de ces points, et non à l'un des points D ou D', que peut se rendre le point $[x, y]$, lorsque α_0 dépassant $a\sqrt[3]{4}$, et $\alpha_0\sqrt[2]{3} \pm \beta_0$ étant négatifs, le point de départ appartient d'ailleurs à une branche de conjuguée tangente à la courbe réelle en un point de l'arc OBSA.

L'égalité momentanée des distances modulaires du point de départ aux points A et D ou D', quand $\alpha_0\sqrt{3} \pm \beta = 0$, ne signifie donc en aucune façon que la limite de la région de convergence passe à la fois au point A et à l'un des points D ou D', mais bien qu'elle passe au point A et à l'un des points qui, ayant leurs abscisses égales à celles des points D et D', ne présentent toutefois aucune particularité remarquable.

La fausse indication fournie par la condition de convergence tient encore, dans ce cas, à ce que l'ordonnée du point de départ n'y entre pas : lorsque le point de départ appartiendra à une branche de conjuguée tangente à la courbe réelle en un point de l'arc AOT', la même indication, dans les mêmes circonstances,

$$\alpha_0\sqrt{3} \pm \beta_0 = 0$$

deviendra exacte.

La même difficulté apparente, si l'on eût voulu l'apercevoir, se serait déjà présentée lorsque le point de départ appartenait à une branche de conjuguée tangente à l'arc TO : si, par exemple, on avait pris pour point de départ le point de cet arc, qui, ayant pour abscisse $\frac{a\sqrt[3]{4}}{2}$ ou $\frac{a}{\sqrt[3]{2}}$, se trouverait sur une verticale menée à égale distance de l'axe des y et de la tangente au point A, les distances modulaires du point de départ à l'origine et au point A se seraient trouvées égales ; mais il n'eût évidemment pas fallu en conclure que la limite de la région de convergence dût alors passer à la fois à l'origine et au point A : elle aurait passé par l'origine et par le point

$$x = a\sqrt[3]{4},$$
$$y = -2a\sqrt[3]{2}.$$

C'est par les mêmes motifs que chacun des points du lieu $\alpha = 0$ paraissait également éloigné des deux points dangereux du lieu

$$y^3 - a^2y + a^2x = 0;$$

α_0 devenant nul sans que α'_0 le fût, la limite de la région de convergence passait à l'un des points dangereux et au point simple qui avait même abscisse que l'autre.

Supposons maintenant que le point de départ marchant toujours dans le même sens se rende sur les conjuguées qui touchent l'arc AOT' de la courbe réelle.

La région de convergence restera d'abord limitée au point A, parce que sur les conjuguées dont le contact aurait lieu très-près de A, on ne pourra pas trouver de points remplissant l'une ou l'autre des conditions

$$\alpha_0 \pm \beta_0 < 0.$$

Tant que le point A restera sur la limite de la région de convergence, il ne pourra arriver au point $[x, y]$ que de passer sur la courbe réelle, sur la portion de la conjuguée $C = \infty$ qui passe au point A ou sur la portion de la conjuguée $C = 0$ qui passe à l'origine. On constatera ces diverses circonstances, comme dans le cas précédent, et l'on pourra par conséquent assigner par les mêmes moyens la valeur finale de y; nous n'insisterons donc pas sur ce cas.

Supposons enfin que le point de départ appartienne à une conjuguée assez éloignée du point A pour qu'on y puisse trouver des points tels, que

$$\alpha_0 \pm \beta_0 \text{ soit négatif,}$$

de façon que la région de convergence soit alors limitée à l'un des points D ou D'.

Les distances modulaires du point de départ à ces deux points étant

$$\left(\alpha_0 + \frac{a\sqrt[3]{4}}{2}\right)^2 + \left(\beta_0 + \frac{a\sqrt[3]{4}\sqrt[2]{3}}{2}\right)^2$$

et

$$\left(\alpha_0 + \frac{a\sqrt[3]{4}}{2}\right)^2 + \left(\beta_0 - \frac{a\sqrt[3]{4}\sqrt[2]{3}}{2}\right)^2,$$

on voit que la région de convergence sera limitée au point D ou au point D' suivant que β_0 sera négatif ou positif, c'est-à-dire suivant que le point de départ appartiendra à l'une ou à l'autre des deux branches de la conjuguée, où il se trouve, qui partent de la courbe réelle. Si le point de départ appartenait à la courbe réelle (il faudrait alors qu'il fût à la gauche de l'origine pour que $\alpha_0 \pm \beta_0$ fût négatif), la limite de la région de convergence passerait à la fois aux deux points D et D'.

Dans le cas qui nous occupe, deux des valeurs de y correspondantes à la valeur finale de x pourraient ne se distinguer l'une de l'autre que par le signe des parties imaginaires des valeurs qu'elles fourniraient pour

$$\frac{dy}{dx};$$

mais on saura toujours quel signe aura dû prendre la partie imaginaire de $\frac{dy}{dx}$ au point d'arrivée, si l'on a relevé les passages du point $[x, y]$ sur l'enveloppe imaginaire.

Cette enveloppe est définie par la condition

$$\frac{ay - x^2}{y^2 - ax} = \text{réel},$$

ou

$$\frac{a\alpha' - \alpha^2 + \beta^2}{\alpha'^2 - \beta'^2 - a\alpha} = \frac{a\beta' - 2\alpha\beta}{2\alpha'\beta' - a\beta},$$

d'où l'on pourrait éliminer α' et β', ce qui fournirait entre α et β une équation

$$\varphi(\alpha, \beta) = 0.$$

Le point $[x, y]$ aurait ou n'aurait pas passé sur l'enveloppe, suivant que

$$\varphi(\alpha_0, \beta_0)\,\varphi(\alpha_1, \beta_1)$$

aurait le signe $-$ ou le signe $+$. Le calcul de l'équation

$$\varphi(\alpha, \beta) = 0$$

ne présentant aucune difficulté théorique, nous ne nous y arrêtons pas.

De l'intégration par série.

116. Nous nous occuperons ici seulement des équations où n'entre pas la variable dépendante, qui, par conséquent, se présentent sous la forme

$$f\left(x, \frac{dy}{dx}\right) = 0$$

ou plus généralement

$$f\left(x, \frac{d^n y}{dx^n}\right) = 0.$$

L'intégration, par la série de Taylor, d'une équation de la forme

$$f\left(x, \frac{dy}{dx}\right) = 0,$$

présentait des difficultés qui rendaient peu sûr l'emploi de cette méthode : et ce n'est pas de l'incertitude qui pesait encore sur la limite de la région de convergence que j'entends parler ici, car, en évitant tous les points dangereux indistinctement, on pouvait du moins être certain que la série employée resterait convergente. En sorte qu'ayant développé $\frac{dy}{dx}$ et par suite, par intégration, y, de la limite inférieure x_0, numérique, à une limite variable x_1, telle que le module de $(x_1 - x_0)$ ne dépassât pas une certaine quantité R_0, on pouvait attribuer à x_1 l'une des valeurs que cette variable pouvait prendre, développer de nouveau $\frac{dy}{dx}$, et par suite y, de la valeur numérique x_1 à une nouvelle limite variable x_2 telle que le module de $(x_2 - x_1)$ ne dépassât pas une nouvelle quantité R_1, et ainsi de suite, ce qui eût fourni pour y une expression de la forme

$$\begin{aligned}
y = y_0 &+ \left(\frac{dy}{dx}\right)_0 \frac{x_1 - x_0}{1} + \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_0 \frac{(x_1 - x_0)^2}{1.2} + \ldots \\
&+ \left(\frac{dy}{dx}\right)_1 \frac{x_2 - x_1}{1} + \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_1 \frac{(x_2 - x_1)^2}{1.2} + \ldots \\
&+ \left(\frac{dy}{dx}\right)_2 \frac{x_3 - x_2}{1} + \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_2 \frac{(x_3 - x_2)^2}{1.2} + \ldots \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&+ \left(\frac{dy}{dx}\right)_n \frac{x_{n+1} - x_n}{1} + \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_n \frac{(x_{n+1} - x_n)^2}{1.2} + \ldots;
\end{aligned}$$

puisque la constante, introduite dans chaque nouvelle intégration, devait avoir pour valeur celle que l'intégration précédente avait donnée pour y.

Mais, en premier lieu, s'il eût fallu recourir à la sommation effective des suites précédentes, pour former la valeur initiale de $\left(\frac{dy}{dx}\right)$, qui devait servir à composer la nouvelle suite qu'on eût voulu ajouter au développement, la longueur des calculs d'abord, mais surtout l'incertitude qui eût nécessairement pesé sur les résultats à obtenir, eussent fait renoncer à l'emploi de cette méthode.

En second lieu, et ce point a beaucoup plus d'importance, on n'eût pu, en tout cas, régler les étapes de x de manière à pouvoir répondre d'obtenir successivement ou séparément toutes ou chacune des m^2 valeurs de y dont les dérivées, au départ, représentées par les différentes racines de l'équation

$$f\left(x_0, \frac{dy}{dx}\right) = 0,$$

seraient devenues, à l'arrivée, celles de l'équation

$$f\left(x_{n+1}, \frac{dy}{dx}\right) = 0.$$

On eût bien pu, pour former la première suite, prendre successivement pour $\left(\frac{dy}{dx}\right)_0$ toutes les racines de l'équation

$$f\left(x_0, \frac{dy}{dx}\right) = 0$$

et avancer de proche en proche vers x_{n+1}; mais on manquait d'une règle qui permît de prévoir sur quelle valeur de $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{n+1}$ on tomberait à la fin du calcul. On pouvait bien recommencer en adoptant de nouvelles étapes pour x, mais on ne pouvait pas être assuré de ne pas retomber toujours sur les mêmes combinaisons. Enfin, si quelques nouveaux essais avaient successivement conduit à de nouvelles combinaisons, on n'avait pas de règle certaine pour parvenir à celles qui se seraient dérobées jusque-là.

Ces difficultés n'existent plus maintenant.

En premier lieu, quand on aura formé les p premières suites qui, conformément à la marche adoptée, devront fournir le développement de y, de x_0 à x_p, au lieu de calculer la valeur de $\left(\frac{dy}{dx}\right)_p$, qui doit concourir à la formation de la $p+1^{\text{ième}}$ suite, par la sommation directe de

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_0 + \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_0 \frac{x_1 - x_0}{1} + \left(\frac{d^3x}{dx^3}\right)_0 \frac{(x_1 - x_0)^2}{1.2} + \ldots$$
$$+ \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_1 \frac{x_2 - x_1}{1} + \left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)_1 \frac{(x^2 - x_1)^2}{1.2} + \ldots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+ \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{p-1} \frac{x_p - x_{p-1}}{1} + \left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)_{p-1} \frac{(x_p - x_{p-1})^2}{1.2} + \ldots,$$

on la tirera de l'équation

$$f\left(x_p \frac{dy}{dx}\right) = 0,$$

qui la fournira plus aisément et avec une approximation dont, au moins, on pourra répondre.

En second lieu, la méthode que nous avons donnée pour reconnaître parmi les racines de l'équation

$$f(x_p, y) = 0$$

celle que représente le développement, suivant la série de Taylor, de la fonction, de x_{p-1} à x_p, cette méthode est évidemment réciproque, c'est-à-dire qu'on pourra en renverser l'emploi et choisir x_p de manière que le point d'arrivée $[x_p, y_p]$ satisfasse à telle condition donnée qu'il pourrait remplir, qu'il se trouve, par exemple, sur une conjuguée désignée que rencontre la région de convergence.

On pourra ainsi, par étapes réglées à l'avance, amener le point $[x, y]$ du point $[x_0, y_0]$ à celui des points $[x_{n+1}, y]$ que l'on voudra.

En déterminant ainsi les m^2 chemins que x devrait suivre successivement pour que $\frac{dy}{dx}$ parvînt de chacune de ses m valeurs qui correspondent à x_0 à chacune de ses m valeurs qui correspondent à x_{n+1} (n est ici un nombre variable, mais x_{n+1} est la valeur finale de x), on obtiendra les m^2 intégrales de l'équation proposée; x_{n+1} y représentera une variable assujettie à des conditions d'inégalité différentes dans des intégrales différentes.

La même méthode s'appliquerait évidemment à une équation différentielle d'ordre supérieur.

$$f\left(x, \frac{d^n y}{dx^n}\right) = 0,$$

les m^2 intégrales de cette équation contiendraient comme constantes arbitraires $y_0, \left(\frac{dy}{dx}\right)_0, \ldots, \left(\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}}\right)_0$. Mais le calcul arithmétique des valeurs de $\left(\frac{dy}{dx}\right)_p, \left(\frac{d^2 y}{dx^2}\right)_p, \ldots, \left(\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}}\right)_p, \left(\frac{d^n y}{dx^n}\right)_p$, nécessaire à la formation de la $p + 1^{ième}$ suite, ne se ferait plus aussi simplement que dans le cas précédent.

$\left(\frac{d^n y}{dx^n}\right)_p$ serait bien toujours fourni par l'équation

$$f\left(x_p, \frac{d^n y}{dx^n}\right) = 0.$$

Mais $\left(\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}}\right)_p, \ldots, \left(\frac{dy}{dx}\right)_p$ devraient être séparément calculés par la sommation directe des suites qui les représenteraient et qu'on aurait formées précédemment par intégrations répétées du développement de $\frac{d^n y}{dx^n}$.

Prenons pour exemple l'équation

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 - a^2\left(\frac{dy}{dx}\right) + a^2 x = 0,$$

dont l'intégrale générale fournirait la quadrature de la courbe

$$z^3 - a^2 z + a^2 x = 0$$

et de ses conjuguées.

Si l'on voulait intégrer y entre des limites

$$x_0, \quad \left(\frac{dy}{dx}\right)_0 = z_0 \qquad \text{et} \qquad x, \quad \left(\frac{dy}{dx}\right) = z,$$

correspondantes à des points du lieu

$$z^3 - a^2 z + a^2 x = 0,$$

situés l'un sur une branche d'une conjuguée tangente à la courbe réelle en un point de l'arc LM (*fig.* 7) et l'autre sur une branche d'une conjuguée tangente à la branche L'N, ce qui serait le plus grand écart possible, on prendrait les points intermédiaires successifs sur des conjuguées dont les points de contact avec la courbe réelle marchassent dans le sens MLOL'N, en évitant, pour plus de simplicité, les conjuguées tangentes à l'enveloppe imaginaire, puisqu'il ne servirait à rien d'y passer d'abord, pour en sortir ensuite.

Cela obligerait à passer par l'origine des coordonnées pour changer de demi-conjuguée. Quand on serait près du point d'arrivée, on repasserait ou non une dernière fois sur la courbe réelle, suivant que l'avant-dernière station et la dernière seraient en des points situés de côtés différents ou du même côté, sur leurs conjuguées respectives, par rapport aux points de contact de ces conjuguées avec la courbe réelle.

De l'intégration par approximation.

117. L'intégration par la série de Taylor avait sur les autres méthodes d'intégration par approximation cet avantage considérable que, la série représentant, au moins entre de certaines limites, la fonction intégrale, on pouvait y donner aussi bien à la variable des valeurs imaginaires que des valeurs réelles ; tandis que les formules anciennement connues de quadratures approchées n'étaient applicables qu'au cas où les valeurs extrêmes de la variable indépendante se trouvaient réelles.

Ce motif de préférence n'existe plus aujourd'hui et je crois qu'on parviendrait, dans la plupart des cas, plus rapidement et plus sûrement à la valeur de l'intégrale cherchée en carrant, suivant les principes établis au chapitre III, les deux conjuguées qui passeraient par les limites, et l'enveloppe (lorsque cela se pourrait), au moyen des formules de Simpson ou de M. Poncelet.

Ces méthodes fourniraient d'ailleurs à volonté des limites inférieures et des limites supérieures de chaque partie de l'intégrale, de façon qu'on pût toujours juger du degré d'approximation du résultat obtenue, ce qui ne peut guère se faire quand on n'a d'autre moyen pour y parvenir que la sommation des termes de la série.