JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

Sur les deux formes $X^2 + Y^2 + Z^2 + 4T^2, X^2 + 4Y^2 + 4Z^2 + 4T^2$

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 6 (1861), p. 440-448.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1861_2_6__440_0>

SUR LES DEUX FORMES
$X^2 + Y^2 + Z^2 + 4T^2,\quad X^2 + 4Y^2 + 4Z^2 + 4T^2$;

PAR M. J. LIOUVILLE.

1. Soit n un nombre entier donné, pair ou impair, que nous représenterons par $2^\alpha m$, m étant impair et l'exposant α pouvant se réduire à zéro. On demande une règle simple qui fasse connaître à priori le nombre N des représentations de n, c'est-à-dire le nombre N des solutions de l'équation indéterminée

$$n = X^2 + Y^2 + Z^2 + 4T^2,$$

où X, Y, Z, T sont des entiers quelconques, positifs, nuls ou négatifs.

Après les beaux résultats obtenus par Jacobi concernant la forme

$$x^2 + y^2 + z^2 + t^2,$$

à laquelle est liée intimement celle dont nous venons de parler, la question n'offre pour ainsi dire aucune difficulté.

2. Prenons d'abord n impair, $n = m$, et en désignant par $\zeta_1(m)$ la somme des diviseurs de m, nous trouverons

$$N = \left[4 + 2(-1)^{\frac{m-1}{2}}\right]\zeta_1(m),$$

c'est-à-dire

$$N = 6\zeta_1(m)$$

quand m est de la forme $4l + 1$, mais

$$N = 2\zeta_1(m)$$

quand m est de la forme $4l + 3$.

Pour le démontrer supposons d'abord $m = 4l + 1$. Dans l'équation

$$m = x^2 + y^2 + z^2 + t^2,$$

pour laquelle le nombre des solutions est $8\zeta_1(m)$, un des carrés au second membre sera impair, les trois autres pairs. Au lieu d'admettre le carré impair aux quatre places qu'il peut occuper, excluons-le de la dernière et nous diminuerons évidemment dans le rapport de 3 à 4 le nombre des solutions qui deviendra par conséquent $6\zeta_1(m)$. Mais alors t étant pair, $t = 2T$, l'équation

$$m = x^2 + y^2 + z^2 + t^2$$

ne différera pas de la nôtre

$$m = X^2 + Y^2 + Z^2 + 4T^2.$$

Donc, pour nous aussi, il y aura $6\zeta_1(m)$ solutions. L'unité appartient à ce cas de m impair $4l + 1$, et les six représentations qui la concernent sont fournies par les équations que voici :

$$1 = (\pm 1)^2 + 0^2 + 0^2 + 4.0^2,$$
$$1 = 0^2 + (\pm 1)^2 + 0^2 + 4.0^2,$$
$$1 = 0^2 + 0^2 + (\pm 1)^2 + 4.0^2.$$

Soit maintenant $m = 4l + 3$. Le nombre des solutions de l'équation

$$m = x^2 + y^2 + z^2 + t^2$$

continuera à être exprimé par $8\zeta_1(m)$, mais on devra avoir au second membre un seul carré pair et trois carrés impairs, de sorte qu'il ne restera que $2\zeta_1(m)$ solutions si l'on exige que le carré pair soit toujours placé le dernier. Le nombre des solutions de notre équation

$$m = X^2 + Y^2 + Z^2 + 4T^2$$

est donc aussi $2\zeta_1(m)$.

Soit, comme exemple, $m = 3$, d'où $\zeta_1(m) = 4$. On devra trouver huit solutions : elles sont fournies en effet par l'équation

$$3 = (\pm 1)^2 + (\pm 1)^2 + (\pm 1)^2 + 4.0^2.$$

3. Soit à présent n pair, et d'abord n impairement pair, $n = 2m$. On remarquera que dans l'équation

$$2m = x^2 + y^2 + z^2 + t^2$$

deux des carrés devront être pairs, les deux autres impairs. Les $24\zeta_1(m)$ solutions qu'elle possède d'après le théorème de Jacobi se divisent donc en deux groupes égaux suivant que t est pair ou impair. Ainsi en prenant t pair, $t = 2T$, on n'aura plus que $12\zeta_1(m)$ solutions. Pour le nombre N des solutions de notre équation

$$2m = X^2 + Y^2 + Z^2 + 4T^2,$$

on a donc aussi

$$N = 12\zeta_1(m),$$

quelle que soit la forme linéaire de m.

En faisant $m = 1$, on trouve $N = 12$, en sorte que le nombre 2 a douze représentations. Elles sont comprises dans les équations

$$2 = (\pm 1)^2 + (\pm 1)^2 + 0^2 + 4.0^2,$$
$$2 = 0^2 + (\pm 1)^2 + (\pm 1)^2 + 4.0^2,$$
$$2 = (\pm 1)^2 + 0^2 + (\pm 1)^2 + 4.0^2.$$

De même, en faisant $m = 3$, on trouve $N = 48$. Or 6 a en effet quarante-huit représentations que fourniront les deux équations

$$6 = (\pm 1)^2 + (\pm 1)^2 + (\pm 2)^2 + 4.0^2$$

et

$$6 = (\pm 1)^2 + (\pm 1)^2 + 0^2 + 4(\pm 1)^2,$$

si l'on transporte $(\pm 2)^2$ dans l'une, 0^2 dans l'autre, de la troisième place à la seconde, puis à la première.

4. Pour n divisible par 4, non par 8, $n = 4m$, on remarquera que dans l'équation

$$4m = X^2 + Y^2 + Z^2 + 4T^2,$$

les entiers X, Y, Z ne peuvent être que pairs. On n'altérera donc pas le nombre des solutions en posant, avec x, y, z entiers,

$$X = 2x, \quad Y = 2y, \quad Z = 2z,$$

de sorte que ce nombre conviendra encore à l'équation

$$m = x^2 + y^2 + z^2 + T^2,$$

pour laquelle on sait d'avance qu'il s'exprime par $8\zeta_1(m)$. Le nombre N des solutions de l'équation

$$4m = X^2 + Y^2 + Z^2 + 8T^2$$

vérifie donc aussi la formule

$$N = 8\zeta_1(m).$$

Le nombre 4, par exemple, doit avoir huit représentations. Les équations qui les fournissent sont

$$\begin{aligned}
4 &= (\pm 2)^2 + 0^2 + 0^2 + 4.0^2, \\
4 &= 0^2 + (\pm 2)^2 + 0^2 + 4.0^2, \\
4 &= 0^2 + 0^2 + (\pm 2)^2 + 4.0^2, \\
4 &= 0^2 + 0^2 + 0^2 + 4(\pm 1)^2.
\end{aligned}$$

5. Soit enfin n divisible par 8, avec quotient pair ou impair, c'est-à-dire soit indifféremment $n = 8m$, $n = 16m$, $n = 32m$, etc. On aura alors pour le nombre N des solutions de l'équation

$$n = X^2 + Y^2 + Z^2 + 4T^2$$

la formule unique

$$N = 24\zeta_1(m).$$

En effet, n étant divisible par 8, posons

$$n = 4.2^{\beta} m$$

et β sera > 0. Or l'équation

$$4.2^{\beta} m = X^2 + Y^2 + Z^2 + 4T^2$$

ne peut avoir lieu sans que X, Y, Z soient pairs. Nous ferons donc

$$X = 2x, \quad Y = 2y, \quad Z = 2z,$$

et nous en conclurons en nombres entiers l'équation nouvelle

$$2^{\beta} m = x^2 + y^2 + z^2 + T^2,$$

qui devra aussi avoir N solutions. Mais à cause de $\beta > 0$, le nombre des solutions dont elle est susceptible est $24\zeta_1(m)$. Donc

$$N = 24\zeta_1(m),$$

ce qu'il fallait démontrer.

Ainsi pour $n = 8$ et pour $n = 16$, on aura $N = 24$. C'est ce qu'on peut vérifier au moyen des équations respectives

$$8 = 0^2 + 4(\pm 1)^2 + 4(\pm 1)^2 + 4.0^2,$$
$$8 = (\pm 2)^2 + 4(\pm 1)^2 + 4.0^2 + 4.0^2,$$

et

$$16 = 0^2 + 4(\pm 2)^2 + 4.0^2 + 4.0^2,$$
$$16 = (\pm 2)^2 + 4(\pm 1)^2 + 4(\pm 1)^2 + 4(\pm 1)^2,$$
$$16 = (\pm 4)^2 + 4.0^2 + 4.0^2 + 4.0^2,$$

en y effectuant les permutations convenables.

6. Nous venons de déterminer le nombre total N des solutions tant propres qu'impropres de l'équation

$$n = X^2 + Y^2 + Z^2 + 4T^2.$$

On pourrait désirer aussi d'avoir séparément le nombre M des solutions *propres* pour lesquelles aucun entier > 1 ne divise à la fois X, Y, Z, T. Alors, au lieu de la fonction numérique $\zeta_1(m)$, il faudra employer avec Eisenstein une autre fonction numérique $Z_1(m)$ qui s'est déjà plusieurs fois présentée à nous. Décomposant l'entier impair m en ses facteurs premiers sous la forme

$$m = a^\mu b^\nu \ldots c^\omega,$$

on a

$$Z_1(m) = (a^\mu + a^{\mu-1})(b^\nu + b^{\nu-1})\ldots(c^\omega + c^{\omega-1}).$$

J'ajoute que nous prenons $Z_1(m) = 1$ pour $m = 1$.

Cela étant, voici les diverses valeurs de M relativement aux cas à distinguer dans l'équation

$$n = 2^\alpha m.$$

Pour n impair, $n = m$, on a

$$M = 6\,Z_1(m)$$

quand m est de la forme $4l + 1$, mais

$$M = 2Z_1(m)$$

quand m est de la forme $4l + 3$.

Pour n impairement pair, $n = 2m$, on a

$$M = 12Z_1(m).$$

Pour n divisible par 4, non par 8, $n = 4m$, on a

$$M = 2Z_1(m)$$

quand m est de la forme $4l + 1$, mais

$$M = 6\,Z_1(m)$$

quand m est de la forme $4l + 3$, de sorte qu'il se produit une sorte d'inversion dans les coefficients qui s'étaient présentés lorsqu'on avait $n = m$.

Pour n divisible par 8, non par 16, $n = 8m$, on a

$$M = 12 Z_1(m).$$

Pour n divisible par 16, non par 32, $n = 16m$, on a

$$M = 16 Z_1(m).$$

Enfin pour m divisible par 32, avec quotient pair ou impair, il vient généralement

$$M = 0.$$

Il n'y a donc plus alors de solutions propres. On verra facilement à priori qu'il en doit être ainsi, les entiers X, Y, Z, T ne pouvant manquer d'être dans ce cas tous divisibles par 2.

7. Ce qui concerne la représentation d'un entier donné $n = 2^\alpha m$, par la forme

$$X^2 + 4Y^2 + 4Z^2 + 4T^2,$$

est tout aussi simple.

Cherchons, en premier lieu, le nombre total Q des représentations tant propres qu'impropres, et nous verrons d'abord que pour n impair, $n = m$, on a $Q = 0$, si $m = 4l + 3$; mais si, au contraire, $m = 4l + 1$, il vient

$$Q = 2\zeta_1(m),$$

car l'équation

$$4l + 1 = X^2 + 4Y^2 + 4X^2 + 4Z^2$$

ne diffère de celle de Jacobi

$$4l + 1 = x^2 + y^2 + z^2 + t^2,$$

que par la place assignée au carré impair X^2.

Pour n impairement pair, $n = 2m$, on retrouve

$$Q = 0,$$

quelle que soit la forme linéaire de m.

Pour n divisible par 4, non par 8, $n = 4m$, on obtient

$$Q = 8\zeta_1(m),$$

car l'équation

$$4m = X^2 + 4Y^2 + 4Z^2 + 4T^2,$$

où l'on a nécessairement X pair $= 2x$, se ramène à celle-ci :

$$m = x^2 + Y^2 + Z^2 + T^2.$$

Semblablement pour n divisible par 8, que le quotient soit pair ou impair, on a toujours

$$Q = 24\zeta_1(m).$$

Quant au nombre P des représentations propres, il dépend de la fonction $Z_1(m)$.

Soit d'abord n impair, $n = m$, on aura

$$P = 0,$$

si $m = 4l + 3$; mais

$$P = 2Z_1(m),$$

si $m = 4l + 1$.

Pour n impairement pair, $n = 2m$, on a au contraire

$$P = 0,$$

quelle que soit la forme linéaire de m.

Pour n divisible par 4, non par 8, $n = 4m$, il faut de nouveau distinguer deux cas. On a, en effet,

$$P = 8Z_1(m)$$

quand $m = 4l + 3$, mais

$$P = 6Z_1(m)$$

quand $m = 4l + 1$.

Pour n divisible par 8, non par 16, $n = 8m$, il vient l'équation unique

$$P = 24Z_1(m),$$

quelle que soit la forme linéaire de m.

De même, pour n divisible par 16, non par 32, $n = 16m$, on a

$$P = 16 Z_4(m).$$

Au delà il n'y a plus de représentations propres, en sorte que pour n divisible par 32, quel que soit le quotient, on a toujours

$$P = 0.$$

Cela est, du reste, évident à priori.

FIN DU TOME SIXIÈME (2^e SÉRIE).

PARIS. — IMPRIMERIE DE MALLET-BACHELIER,
rue de Seine-Saint-Germain, 10, près l'Institut.