JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

Sur la forme $x^2 + 2y^2 + 4z^2 + 8t^2$

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 6 (1861), p. 409-416.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1861_2_6__409_0>

SUR LA FORME
$x^2 + 2y^2 + 4z^2 + 8t^2$;

PAR M. J. LIOUVILLE.

1. J'ai déjà eu l'occasion de faire observer que la forme

$$x^2 + 2y^2 + 4z^2 + 8t^2$$

peut servir à représenter tous les nombres. Mais il s'agit ici d'indiquer une règle simple qui permette de calculer à priori, pour chaque entier donné n, le nombre exact N des représentations, c'est-à-dire le nombre N des solutions de l'équation indéterminée

$$n = x^2 + 2y^2 + 4z^2 + 8t^2,$$

où x, y, z, t sont des entiers indifféremment positifs, nuls ou négatifs.

Comme n peut être tantôt pair et tantôt impair, je ferai

$$n = 2^\alpha m,$$

m étant impair et l'exposant α pouvant se réduire à zéro.

Le cas de n pair est le plus simple. Il se subdivise à la vérité en quatre autres; mais N n'y dépend jamais que de la somme $\zeta_1(m)$ des diviseurs de m, et se rattache facilement au nombre des représentations de n par une somme de quatre carrés. Le cas de n impair (du moins pour un nombre de la forme $4\mu + 1$) exige au contraire qu'on adjoigne à $\zeta_1(m)$ une fonction numérique nouvelle.

2. Commençons donc par prendre n pair, et soit d'abord n impairement pair, $n = 2m$. Je trouve qu'on aura alors

$$N = 2\zeta_1(m).$$

Ainsi pour $m = 1$, $n = 2$, on a

$$N = 2,$$

et c'est ce que confirme l'équation

$$2 = 0^2 + 2(\pm 1)^2 + 4.0^2 + 8.0^2$$

qui fournit en effet deux représentations.

Soit encore $m = 3$, $n = 6$; il viendra

$$N = 2.4 = 8,$$

ce qui est exact, puisque l'on a

$$6 = (\pm 2)^2 + 2(\pm 1)^2 + 4.0^2 + 8.0^2,$$

et

$$6 = 0^2 + 2(\pm 1)^2 + 4(\pm 1)^2 + 8.0^2.$$

Soit enfin $m = 5$, $n = 10$, d'où

$$N = 2.6 = 12:$$

la vérification cherchée sera fournie cette fois par les équations

$$10 = (\pm 2)^2 + 2(\pm 1)^2 + 4(\pm 1)^2 + 8.0^2$$

et

$$10 = 0^2 + 2(\pm 1)^2 + 4.0^2 + 8(\pm 1)^2.$$

Il serait inutile de pousser plus loin ces calculs.

3. Soit, en second lieu, n divisible par 4, mais non par 8, $n = 4m$. La valeur de N deviendra

$$N = 4\zeta_1(m).$$

Ainsi pour $m = 1$, $n = 4$, on devra avoir

$$N = 4;$$

or c'est ce que confirment les deux équations

$$4 = (\pm 2)^2 + 2.0^2 + 4.0^2 + 8.0^2$$

et

$$4 = 0^2 + 2.0^2 + 4(\pm 1)^2 + 8.0^2.$$

Soit encore $m = 3$, $n = 12$. Notre formule donnera

$$N = 4.4 = 16;$$

or il existe en effet seize représentations, vu que l'on a

$$12 = (\pm 2)^2 + 2(\pm 2)^2 + 4.0^2 + 8.0^2$$

et

$$12 = 0^2 + 2(\pm 2)^2 + 4(\pm 1)^2 + 8.0^2,$$

puis

$$12 = (\pm 2)^2 + 2.0^2 + 4.0^2 + 8(\pm 1)^2,$$

enfin

$$12 = 0^2 + 2.0^2 + 4(\pm 1)^2 + 8(\pm 1)^2.$$

On continuera aisément, si l'on veut, ces vérifications.

4. Soit à présent n divisible par 8, non par 16, $n = 8m$. J'obtiens alors

$$N = 8\zeta_1(m).$$

Ainsi pour $m = 1$, $n = 8$, on devra avoir

$$N = 8,$$

et c'est ce qui résulte effectivement des trois équations

$$8 = (\pm 2)^2 + 2.0^2 + 4(\pm 1)^2 + 8.0^2,$$
$$8 = 0^2 + 2(\pm 2)^2 + 4.0^2 + 8.0^2,$$
$$8 = 0^2 + 2.0^2 + 4.0^2 + 8(\pm 1)^2.$$

Soit encore $m = 3$, $n = 24$. Il faudra que

$$N = 8.4 = 32.$$

Or, je vois que l'on a d'une part

$$24 = (\pm 4)^2 + 2(\pm 2)^2 + 4.0^2 + 8.0^2,$$

puis

$$24 = 0^2 + 2(\pm 2)^2 + 4(\pm 2)^2 + 8.0^2,$$

et d'autre part

$$24 = (\pm 4)^2 + 2.0^2 + 4.0^2 + 8(\pm 1)^2,$$

puis

$$24 = 0^2 + 2.0^2 + 4(\pm 2)^2 + 8(\pm 1)^2,$$

enfin

$$24 = (\pm 2)^2 + 2(\pm 2)^2 + 4(\pm 1)^2 + 8(\pm 1)^2,$$

ce qui fournit bien les trente-deux représentations annoncées.

5. Prenons maintenant n divisible par 16, ou généralement $n = 2^\alpha m$, avec $\alpha = 4$ ou $\alpha > 4$. La valeur de N, si grand que soit α, restera toujours

$$N = 24\zeta_1(m),$$

comme dans le théorème de Jacobi pour le nombre des représentations d'un entier pair en une somme de quatre carrés.

Ainsi, pour $m = 1$, $\alpha = 4$, $n = 16$, on aura

$$N = 24.$$

Les équations qui fournissent les vingt-quatre représentations indiquées sont, d'une part

$$16 = (\pm 4)^2 + 2.0^2 + 4.0^2 + 8.0^2,$$

puis

$$16 = 0^2 + 2.0^2 + 4(\pm 2)^2 + 8.0^2$$

et

$$16 = (\pm 2)^2 + 2(\pm 2)^2 + 4(\pm 1)^2 + 8.0^2,$$

d'autre part

$$16 = 0^2 + 2(\pm 2)^2 + 4.0^2 + 8(\pm 1)^2$$

et

$$16 = (\pm 2)^2 + 2.0^2 + 4(\pm 1)^2 + 8(\pm 1)^2.$$

Soit ensuite $m = 1$, mais $\alpha = 5$, $n = 32$, et l'on devra continuer à avoir

$$N = 24.$$

C'est ce qui arrive, les équations qui fournissent les représentations de 32 étant

$$
\begin{aligned}
32 &= 0^2 + 2(\pm 4)^2 + 4.0^2 + 8.0^2,\\
32 &= (\pm 4)^2 + 2.0^2 + 4(\pm 2)^2 + 8.0^2,\\
32 &= (\pm 4)^2 + 2(\pm 2)^2 + 4.0^2 + 8(\pm 1)^2,\\
32 &= 0^2 + 2(\pm 2)^2 + 4(\pm 2)^2 + 8(\pm 1)^2,\\
32 &= 0^2 + 2.0^2 + 4.0^2 + 8(\pm 2)^2.
\end{aligned}
$$

6. Soit enfin n impair, $n = m$. Il faudra alors considérer les décompositions dont m est susceptible sous la forme

$$m = i^2 + 4s^2,$$

i étant un entier impair et positif; tandis que l'entier s est indifféremment positif, nul ou négatif. On distinguera les valeurs de i qui sont de la forme $4k + 1$ et celles qui sont de la forme $4k + 3$. L'excès de la somme des premières sur la somme des dernières, que l'on peut représenter par

$$\sum(-1)^{\frac{i-1}{2}} i,$$

constitue une fonction nouvelle qu'il faudra tantôt ajouter à $\zeta_1(m)$, tantôt retrancher de $\zeta_1(m)$, pour avoir dans le cas de n impair $(n = m)$ que nous discutons la valeur de N. La formule générale est

$$N = \zeta_1(m) + (-1)^{\frac{m^2-1}{8}} \sum(-1)^{\frac{i-1}{2}} i.$$

Quand m est de la forme $4\mu + 3$, l'équation

$$m = i^2 + 4s^2$$

est impossible, de sorte qu'il vient simplement

$$N = \zeta_1(m),$$

sans fonction numérique nouvelle.

Ainsi, pour $n = m = 3$, on a

$$N = \zeta_1(3) = 4,$$

ce qui est vérifié par l'équation

$$3 = (\pm 1)^2 + 2(\pm 1)^2 + 4.0^2 + 8.0^2.$$

De même, pour $n = m = 7$, on doit avoir

$$N = \zeta_1(7) = 8.$$

L'équation

$$7 = (\pm 1)^2 + 2(\pm 1)^2 + 4(\pm 1)^2 + 8.0^2$$

confirme ce fait.

Quand m est de la forme $4\mu + 1$, l'équation

$$m = i^2 + 4s^2$$

est souvent possible, et quand elle a réellement lieu, l'intervention de la fonction numérique

$$\sum (-1)^{\frac{i-1}{2}} i$$

devient nécessaire. Il faut, pour avoir N, ajouter la valeur de cette fonction à celle de $\zeta_1(m)$, ou la retrancher, suivant que l'on a

$$(-1)^{\frac{m^2-1}{8}} = 1,$$

ou, au contraire,

$$(-1)^{\frac{m^2-1}{8}} = -1,$$

c'est-à-dire suivant que m est de la forme $8g + 1$ ou de la forme $8g + 5$.

Ainsi, pour $m = 8g + 1$, on a

$$N = \zeta_1(m) + \sum (-1)^{\frac{i-1}{2}} i.$$

Soit, comme exemple, le nombre $1 = 1^2 + 4.0^2$. On aura

$$N = 1 + 1 = 2,$$

ce qui s'accorde avec l'équation

$$1 = (\pm 1)^2 + 2.0^2 + 4.0^2 + 8.0^2.$$

Soit, comme second exemple, le nombre $9 = 3^2 + 4.0^2$. Il faudra que

$$N = \zeta_1(9) - 3 = 10.$$

Les équations ci-après

$$9 = (\pm 3)^2 + 2.0^2 + 4.0^2 + 8.0^2,$$
$$9 = (\pm 1)^2 + 2(\pm 2)^2 + 4.0^2 + 8.0^2,$$
$$9 = (\pm 1)^2 + 2.0^2 + 4.0^2 + 8(\pm 1)^2,$$

confirment ce fait.

Pour $m = 8g + 5$ on aura, au contraire,

$$N = \zeta_1(m) - \sum (-1)^{\frac{i-1}{2}} i.$$

Soit, comme exemple, le nombre 5. Comme on a

$$5 = 1^2 + 4(\pm 1)^2,$$

il y a ici deux valeurs de i, l'une et l'autre égales à 1, en sorte que

$$N = 6 - 2 = 4.$$

Les quatre décompositions que la formule indique répondent à l'équation

$$5 = (\pm 1)^2 + 2.0^2 + 4(\pm 1)^2 + 8.0^2,$$

et il est clair qu'il n'y en a pas d'autres.

7. Nous savons d'avance que tout entier n, pair ou impair, peut s'exprimer par la forme

$$x^2 + 2y^2 + 4z^2 + 8t^2.$$

Mais il est bon de montrer que cela résulte des équations que nous venons de donner pour calculer N dans chaque cas. La difficulté, s'il y en a une, ne peut concerner que les nombres impairs $4\mu + 1$. Il faut prouver que pour eux on a toujours

$$\zeta_1(m) + (-1)^{\frac{m^2-1}{8}} \sum (-1)^{\frac{i-1}{2}} i > 0.$$

Or, je dis qu'en laissant de côté le cas vérifié déjà de $m = 1$, l'on a même

$$\zeta_1(m) > \sum i.$$

En effet soit j le plus grand entier impair contenu dans $\sqrt{m}$. L'équation $m = i^2 + 4s^2$, où chaque valeur convenable de i ne peut être employée que deux fois au plus, entraîne l'inégalité

$$\sum i \leqq 2(1 + 3 + 5 + . . + j),$$

d'où

$$\sum i \leqq \frac{1}{2}(j+1)^2,$$

ce qui donne toujours

$$\sum i < \frac{1}{2}(m + 2\sqrt{m} + 1),$$

attendu que la valeur $i = \sqrt{m}$, qu'on doit compter quand m est un carré j^2, ne peut être employée qu'une fois, s se réduisant alors à zéro. Mais d'un autre côté $\zeta_1(m)$ est au moins égal à $m + 1$. La différence

$$m + 1 - \frac{1}{2}(m + 2\sqrt{m} + 1) = \frac{m - 2\sqrt{m} + 1}{2}$$

est d'ailleurs positive dès $m = 5$. Notre démonstration est donc complète. On voit en outre que quand m augmente à l'infini, N augmente pareillement à l'infini.