JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

Théorème concernant les nombres premiers de la forme $8\mu + 1$

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 6 (1861), p. 31-32.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1861_2_6__31_0>

gallica NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Gallica de la Bibliothèque nationale de France
http://gallica.bnf.fr/

et catalogué par Mathdoc dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc
http://www.numdam.org/journals/JMPA

THÉORÈME

CONCERNANT LES NOMBRES PREMIERS DE LA FORME $8\mu+1$;

Par M. J. LIOUVILLE.

Soit m un nombre premier donné, de la forme $8\mu+1$: on pose de toutes les manières possibles l'équation

$$m = 4x^2 + q^{4l+1}y^2,$$

en y prenant pour x et y des entiers impairs et pour q les nombres premiers $(8\nu+5)$ non diviseurs de y : on admet pour l la valeur zéro. Il s'agit de savoir si le nombre N des décompositions de m sous la forme indiquée est pair ou impair.

En d'autres termes, on retranche (par la pensée) d'un nombre premier donné m, de la forme $8\mu+1$, les carrés des nombres impairement pairs 2, 6, etc., puis considérant le nombre N de ceux des restes qui peuvent se mettre sous la forme

$$q^{4l+1}y^2,$$

où q désigne un nombre premier non diviseur de y et naturellement de la forme $8\nu+5$, on demande une règle facile pour dire à priori si N est pair ou impair.

La réponse que je fais à cette question contentera, je crois, les géomètres.

Puisque m est un nombre premier $8\mu+1$, on peut poser d'une seule manière, en nombres entiers,

$$m = a^2 + 8b^2.$$

Or je trouve que l'on a toujours

$$N \equiv b \pmod{2},$$

à savoir N est pair quand b est pair, mais impair quand b est impair.

Ainsi, pour

$$m = 17 = 3^2 + 8.1^2,$$

on a $b = 1$, donc N impair; et c'est ce qui résulte en effet de la décomposition canonique

$$17 = 4.1^2 + 13.1^2.$$

Au contraire, pour

$$m = 41 = 3^2 + 8.2^2,$$

on a $b = 2$, donc N pair; et cela est exact encore, puisque les décompositions canoniques sont ici au nombre de deux :

$$41 = 4.1^2 + 37.1^2,$$
$$41 = 4.3^2 + 5.1^2.$$