JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

Théorèmes concernant le double d'un nombre premier de la forme $16\kappa + 7$

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 6 (1861), p. 28-30.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1861_2_6__28_0>

THÉORÈMES

CONCERNANT

LE DOUBLE D'UN NOMBRE PREMIER DE LA FORME $16k+7$;

Par M. J. LIOUVILLE.

Le double $(2m)$ de tout nombre premier m de la forme $16k+7$ jouit des deux propriétés ci-après :

1° On peut poser au moins une fois (et toujours un nombre impair de fois) l'équation

$$2m = (8x+1)^2 + q^{4l+1}y^2,$$

x étant un entier indifféremment positif, nul ou négatif, d'ailleurs pair ou impair, tandis que y est impair et positif : quant à q, c'est un nombre premier $(8g+5)$ qui ne divise pas y : on admet pour l la valeur zéro.

En d'autres termes, si du double d'un nombre premier donné m de la forme $16k+7$, on retranche, tant que faire se peut, les carrés

$$1^2,\ 7^2,\ 9^2,\ 15^2,\ 17^2,\ldots,$$

fournis par la formule

$$(8x+1)^2,$$

en y prenant x positif, nul ou négatif, il y aura un nombre impair de restes exprimables par le produit

$$q^{4l+1}y^2,$$

q étant un nombre premier non diviseur de y et naturellement de la forme $8g+5$.

2° On peut de même poser au moins une fois (et toujours un nombre impair de fois) l'équation

$$2m = (8x + 3)^2 + q^{4l+1} y^2,$$

x étant un entier indifféremment positif, nul ou négatif, tandis que y est impair et positif, q continuant à désigner un nombre premier $8g + 5$ non diviseur de y, et la valeur $l = 0$ restant admise.

En d'autres termes, si du double d'un nombre premier donné m de la forme $16k + 7$, on retranche, tant que faire se peut, les carrés

$$3^2,\ 5^2,\ 11^2,\ 13^2,\ 19^2, \ldots,$$

fournis par la formule

$$(8x + 3)^2,$$

en y prenant x indifféremment positif, nul ou négatif, il y aura un nombre impair de restes exprimables par le produit

$$q^{4l+1} y^2,$$

q étant un nombre premier non diviseur de y et naturellement de la forme $8g + 5$.

Nous donnerons plus tard la démonstration (fort simple) de ces deux théorèmes. Bornons-nous aujourd'hui à les vérifier numériquement sur quelques exemples.

Soit d'abord

$$m = 7.$$

Nous aurons d'une part

$$2.7 = 1^2 + 13.1^2,$$

conformément au premier théorème, et d'autre part

$$2.7 = 3^2 + 5.1^2,$$

conformément au second théorème.

Soit ensuite

$$m = 23:$$

nous aurons semblablement deux équations canoniques

$$2.23 = 1^2 + 5.3^2$$

et

$$2.23 = 3^2 + 37.1^2.$$

De même pour

$$m = 71,$$

on a

$$2.71 = 9^2 + 61.1^2$$

et

$$2.71 = 5^2 + 13.3^2.$$

Il serait inutile d'ajouter d'autres exemples. Mais en terminant nous remarquerons, comme conséquence immédiate de nos deux théorèmes, que pour chaque nombre premier m de la forme $16k + 7$, le nombre des solutions de l'équation

$$2m = x^2 + q^{4l+1} y^2$$

est pair, mais au moins égal à 2, lorsqu'on admet pour x comme pour y des valeurs impaires quelconques, q continuant à être un nombre premier $(8g + 5)$ qui ne divise pas y.