JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

Théorème concernant le produit d'un nombre premier $8\mu + 3$ par le carré d'un nombre premier $8\nu + 7$

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 6 (1861), p. 207-208.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1861_2_6__207_0>

THÉORÈME

CONCERNANT

LE PRODUIT D'UN NOMBRE PREMIER $8\mu + 3$ PAR LE CARRÉ D'UN NOMBRE PREMIER $8\nu + 7$.

(Extrait d'une Lettre de M. LIOUVILLE à M. BESGE.)

« ... Voici un théorème assez curieux au sujet du produit d'un » nombre premier donné m, de la forme $8\mu + 3$, par le carré d'un » nombre premier a, donné aussi, mais de la forme $8\nu + 7$. On pose » de toutes les manières possibles l'équation

$$a^2 m = x^2 + 2p^{4l+1} y^2,$$

» p étant un nombre premier (naturellement de la forme $4\nu + 1$) et » x, y des entiers impairs, x non divisible par a, et y non divisible » par p. Le théorème dont je parle fournit une règle très-simple pour » décider à priori si le nombre N des décompositions de $a^2 m$ ainsi » obtenues est pair ou impair. En employant le signe connu introduit » par Legendre dans la théorie des résidus quadratiques, je trouve » que N est impair quand

$$\left(\frac{a}{m}\right) = 1,$$

» c'est-à-dire quand a est résidu quadratique de m; au contraire N » est pair quand

$$\left(\frac{a}{m}\right) = -1,$$

» c'est-à-dire quand a est non résidu quadratique de m.

» On a un exemple très-simple du premier cas en prenant $m = 3$, » $a = 7$. Comme

$$\left(\frac{7}{3}\right) = 1,$$

» on doit trouver alors N impair; et en effet $N = 3$, les équations canoniques étant

$$49.3 = 1^2 + 2.73.1^2,$$
$$49.3 = 5^2 + 2.61.1^2,$$
$$49.3 = 11^2 + 2.13.1^2.$$

» Vous aurez un exemple du second cas en prenant $m = 11$, $a = 7$.
» Comme

$$\left(\frac{7}{11}\right) = -1,$$

» notre théorème dit que N sera pair. Or on trouve en effet que
» $N = 6$. Voici les équations canoniques :

$$539 = 1^2 + 2.269.1^2,$$
$$539 = 5^2 + 2.257.1^2,$$
$$539 = 9^2 + 2.229.1^2,$$
$$539 = 15^2 + 2.157.1^3,$$
$$539 = 19^2 + 2.89.1^2,$$
$$539 = 23^2 + 2.5.1^2.$$

» Vous vous contenterez de ces deux exemples. Mais en terminant
» permettez-moi d'insister sur la condition de x non divisible par a:
» elle est essentielle. »