JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

Théorème concernant le produit de deux nombres premiers égaux ou inégaux de la forme $120\mu + 31$

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 6 (1861), p. 201-202.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1861_2_6__201_0>

THÉORÈME

CONCERNANT

LE PRODUIT DE DEUX NOMBRES PREMIERS ÉGAUX OU INÉGAUX DE LA FORME $120\mu+31$;

PAR M. J. LIOUVILLE.

Désignons par m le produit de deux nombres premiers donnés, l'un et l'autre de la forme $120\mu+31$, mais du reste égaux ou inégaux. On aura au sujet du produit m ce théorème, que l'on peut poser au moins une fois, et toujours un nombre impair de fois, l'équation

$$m = 60x^2 + p^{4l+1}y^2,$$

x et y étant des entiers impairs, et p un nombre premier qui ne divise pas y. On admet pour l la valeur zéro. Quant au nombre premier p, nous ne lui imposons à priori aucune condition; mais il est évident que notre équation

$$m = 60x^2 + p^{4l+1}y^2$$

ne pourrait pas être vérifiée si l'on n'avait pas, à la fois,

$$p \equiv 5 \pmod{8}$$

et

$$p \equiv 1 \pmod{3}, \qquad p \equiv \pm 1 \pmod{5}.$$

On peut donc affirmer que p sera toujours de l'une ou de l'autre des deux formes

$$120g+61, \qquad 120g+109.$$

Nous nous contenterons de vérifier notre théorème sur deux exemples. Le plus simple est celui de

$$m = 31.31,$$

c'est-à-dire de

$$m = 961.$$

Or on a l'équation canonique

$$961 = 60.3^2 + 421.1^2.$$

On n'a pas d'équation canonique en retranchant 60 de 961, puisque le reste 901 est le produit de 17 par 53.

Soit ensuite

$$m = 151.31,$$

c'est-à-dire

$$m = 4681.$$

Les équations canoniques seront alors au nombre de trois, savoir

$$4681 = 60.1^2 + 4621.1^2,$$
$$4681 = 60.5^2 + 3181.1^2,$$
$$4681 = 60.7^2 + 1741.1^2,$$

où 4621, 3181, 1741 sont des nombres premiers. On n'a pas d'équation canonique en retranchant 60.3^2 de 4681, puisque le reste 4141 est le produit de 41 par 101.