JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

Théorèmes concernant le quadruple d'un nombre premier contenu dans l'une ou dans l'autre des deux formes $8\mu + 3$, $8\mu + 5$

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 6 (1861), p. 1-6.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1861_2_6__1_0>

JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

THÉORÈMES

CONCERNANT

LE QUADRUPLE D'UN NOMBRE PREMIER CONTENU DANS L'UNE OU DANS L'AUTRE DES DEUX FORMES $8\mu+3$, $8\mu+5$;

PAR M. J. LIOUVILLE.

Le quadruple $(4m)$ d'un nombre premier donné m, de l'une ou de l'autre des deux formes linéaires $8\mu+3$, $8\mu+5$, jouit de propriétés curieuses.

1° On peut poser au moins une fois (et toujours un nombre impair de fois) l'équation

$$4m = (8t+1)^2 + p^{4l+1}y^2,$$

t étant un entier indifféremment positif, nul ou négatif, d'ailleurs pair ou impair, tandis que y est impair et positif; quant à p, c'est un nombre premier $(8\nu+3)$ qui ne divise pas y : on admet pour l la valeur zéro.

L'expression $(8t+1)^2$, en y prenant t positif, nul ou négatif, donne les carrés des nombres positifs de ces deux formes

$$8s+1, \quad 8s-1,$$

savoir

$$1^2,\ 7^2,\ 9^2,\ 15^2,\ 17^2,\ldots;$$

notre théorème revient donc à dire qu'il y a un nombre impair des termes de la suite

$$4m-1^2,\ 4m-7^2,\ 4m-9^2,\ 4m-15^2,\ 4m-17^2,\ldots,$$

qu'on peut exprimer par

$$p^{4l+1}y^2,$$

p étant un nombre premier non diviseur de y et naturellement de la forme $8\nu+3$.

2° On peut de même poser au moins une fois (et toujours un nombre impair de fois) l'équation

$$4m=(8t+3)^2+p^{4l+1}y^2,$$

t continuant à être un entier indifféremment positif, nul ou négatif, y un entier positif impair, et p un nombre premier $(8\nu+3)$ qui ne divise pas y.

L'expression $(8t+3)^2$, en y prenant t positif, nul ou négatif, donne les carrés des nombres positifs de ces deux formes

$$8s+3,\quad 8s-3,$$

savoir

$$3^2,\ 5^2,\ 11^2,\ 13^2,\ 19^2,\ldots;$$

notre second théorème revient donc à dire qu'il y a un nombre impair des termes de la suite

$$4m-3^2,\ 4m-5^2,\ 4m-11^2,\ 4m-13^2,\ 4m-19^2,\ldots,$$

qu'on peut exprimer par

$$p^{4l+1}y^2,$$

p étant un nombre premier non diviseur de y et naturellement de la forme $8\nu+3$.

Si, au lieu de considérer séparément les deux équations

$$4m = (8t+1)^2 + p^{4l+1} y^2$$

et

$$4m = (8t+3)^2 + p^{4l+1} y^2,$$

on avait voulu considérer l'équation unique

$$4m = x^2 + p^{4l+1} y^2,$$

qui les renferme toutes deux en conservant à y et à p leur signification et en prenant pour x un entier impair (positif) quelconque, le nombre N des solutions de cette équation unique aurait été pair; et nos méthodes, en nous indiquant ce fait de $N \equiv 0 \pmod{2}$, n'auraient pas pu nous faire savoir que l'on n'a jamais $N = 0$. Au contraire, en décomposant l'équation

$$4m = x^2 + p^{4l+1} y^2$$

en deux autres, eu égard à la valeur de x (mod. 8), nous décomposons aussi N en deux parties N_1, N_2 sur lesquelles nos méthodes ont prise. Réussissant alors à reconnaître que N_1 et N_2 sont des entiers impairs, nous pouvons en conclure que N est essentiellement > 0. Il fallait séparer deux groupes de nombres, que l'équation unique mêlait mal à propos, pour obtenir des résultats précis.

Les théorèmes que nous venons d'énoncer au sujet des nombres N_1 et N_2 sont aisés à établir. Mais nous nous bornerons ici à les vérifier numériquement sur les exemples les plus simples.

Commençons par les nombres premiers m de la forme

$$8\mu + 3.$$

Le plus petit est 3; or on a d'une part

$$4.3 = 1^2 + 11.1^2,$$

et d'autre part

$$4.3 = 3^2 + 3.1^2,$$

conformément à nos deux théorèmes. Vient ensuite $m = 11$, pour lequel on trouve

$$4.11 = 1^2 + 43.1^2$$

et

$$4.11 = 5^2 + 19.1^2.$$

Une vérification semblable a lieu pour $m = 19$, en vertu des équations canoniques

$$4.19 = 1^2 + 3.5^2$$

et

$$4.19 = 3^2 + 67.1^2\,;$$

l'équation

$$4.19 = 7^2 + 3^3.1^2$$

ne doit pas être comptée ici, parce que l'exposant 3 n'est pas de la forme $4l + 1$.

En faisant encore

$$m = 43,$$

on a, d'un côté, l'équation canonique

$$4.43 = 1^2 + 19.3^2,$$

et, d'une autre part, ces trois-ci :

$$4.43 = 3^2 + 163.1^2,$$
$$4.43 = 5^2 + 3.7^2,$$
$$4.43 = 13^2 + 3.1^2.$$

Toujours nos théorèmes sont vérifiés : arrêtons-nous donc (quant à la forme $8\mu + 3$) au dernier exemple de

$$m = 59,$$

pour lequel les équations voulues sont

$$4.59 = 15^2 + 11.1^2$$

et

$$4.59 = 3^2 + 227.1^2,$$
$$4.59 = 5^2 + 211.1^2,$$
$$4.59 = 13^2 + 67.1^2.$$

Passons aux nombres premiers m de la forme

$$8\mu + 5.$$

Le plus petit de ces nombres est 5; or on a, d'une part,

$$4.5 = 1^2 + 19.1^2$$

et, d'autre part,

$$4.5 = 3^2 + 11.1^2,$$

conformément à nos deux théorèmes. Vient ensuite $m = 13$, pour lequel on trouve

$$4.13 = 7^2 + 3.1^2$$

et

$$4.13 = 3^2 + 43.1^2;$$

l'équation

$$4.13 = 5^2 + 3^3.1^2$$

ne doit pas être comptée ici parce que l'exposant 3 n'est pas de la forme $4l + 1$. Nos théorèmes sont également vérifiés pour $m = 29$, en vertu des équations canoniques

$$4.29 = 7^2 + 67.1^2$$

et

$$4.29 = 3^2 + 107.1^2.$$

Soit encore

$$m = 37:$$

on aura semblablement les équations de forme voulue

$$4.37 = 1^2 + 3.7^2,$$
$$4.37 = 7^2 + 11.3^2,$$
$$4.37 = 9^2 + 67.1^2,$$

et

$$4.37 = 3^2 + 139.1^2;$$

l'équation

$$4.37 = 11^2 + 3^3.1^2$$

a dû être mise de côté par la raison déjà donnée plus haut que l'exposant 3 n'est pas de la forme $4l+1$.

Enfin, soit

$$m = 53:$$

il viendra les équations canoniques

$$4.53 = 1^2 + 211.1^2,$$
$$4.53 = 7^2 + 163.1^2,$$
$$4.53 = 9^2 + 131.1^2,$$

et

$$4.53 = 13^2 + 43.1^2.$$

Dans cet exemple, comme dans ceux qui précèdent et dans tous ceux qu'on pourrait ajouter, nos deux théorèmes ont lieu.