JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

Théorème concernant le produit de deux nombres premiers, l'un de la forme $40\mu + 3$, l'autre de la forme $40\nu + 23$

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 6 (1861), p. 197-198.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1861_2_6__197_0>

THÉORÈME

CONCERNANT

LE PRODUIT DE DEUX NOMBRES PREMIERS, L'UN DE LA FORME $40\mu + 3$, L'AUTRE DE LA FORME $40\nu + 23$;

Par M. J. LIOUVILLE.

Désignons par m le produit de deux nombres premiers donnés, l'un de la forme $40\mu + 3$, l'autre de la forme $40\nu + 23$. Nous aurons au sujet du produit m ce théorème, que l'on peut poser au moins une fois, et toujours un nombre impair de fois, l'équation

$$m = 10x^2 + p^{4l+1}y^2,$$

x et y étant des entiers impairs, et p un nombre premier qui ne divise pas y. On admet pour l la valeur zéro. Quant au nombre premier p, nous ne le soumettons à priori à aucune condition; mais avec la valeur que nous attribuons à m, et x étant impair, il est évident que l'équation

$$m = 10x^2 + p^{4l+1}y^2$$

entraîne ces deux congruences

$$p \equiv 3 \pmod{8},$$

et

$$p \equiv \pm 1 \pmod{5}.$$

On peut dès lors affirmer que p sera de l'une ou de l'autre des deux formes

$$40g + 11, \quad 40g + 19.$$

Contentons-nous de vérifier notre théorème sur des exemples très-simples.

Premier exemple : $m = 3.23$, c'est-à-dire $m = 69$. — On a l'équation canonique

$$69 = 10.1^2 + 59.1^2.$$

Deuxième exemple : $m = 3.103$, c'est-à-dire $m = 309$. — On a l'équation canonique

$$309 = 10.5^2 + 59.1^2.$$

On n'a pas d'équation canonique en retranchant 10 ni 10.3^2 de 309, les restes 299 et 219 étant respectivement égaux à 13.23 et 3.73.

Troisième exemple : $m = 3.223$, c'est-à-dire $m = 669$. — Les équations canoniques sont alors au nombre de trois, savoir

$$669 = 10.1^2 + 659.1^2,$$
$$669 = 10.5^2 + 419.1^2,$$
$$669 = 10.7^2 + 179.1^2.$$

On n'a pas d'équation canonique en retranchant 10.3^2 de 669, puisque le reste 579 est le produit de deux nombres premiers 3 et 193.

Quatrième exemple : $m = 43.23$, c'est-à-dire $m = 989$. — Cette fois encore il y a trois équations canoniques :

$$989 = 10.5^2 + 739.1^2,$$
$$989 = 10.7^2 + 499.1^2,$$
$$989 = 10.9^2 + 179.1^2.$$

On n'a pas d'équation canonique en retranchant 10.1^2 ni 10.3^2 de 989 ; car les deux restes 979 et 899, qu'on obtient ainsi, sont égaux respectivement à 11.89 et 29.31.

Ces exemples suffiront, je crois ; mais si loin qu'on veuille aller dans les exercices numériques, on trouvera toujours notre théorème exact.