JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES
FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874
PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

Théorème concernant le produit de deux nombres premiers égaux ou inégaux de la forme $24\mu + 5$

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 6 (1861), p. 189-190.
<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1861_2_6__189_0>

THÉORÈME

CONCERNANT

LE PRODUIT DE DEUX NOMBRES PREMIERS ÉGAUX OU INÉGAUX DE LA FORME $24\mu+5$;

Par M. J. LIOUVILLE.

Désignons par m le produit de deux nombres premiers donnés, l'un et l'autre de la forme $24\mu + 5$, mais du reste égaux ou inégaux. On aura au sujet du produit m ce théorème, que l'on peut poser au moins une fois, et toujours un nombre impair de fois, l'équation

$$m = 12x^2 + p^{4l+1}y^2,$$

x et y étant des entiers impairs et p un nombre premier qui ne divise pas y. On admet pour l la valeur zéro. Quant au nombre premier p, nous ne lui imposons à priori aucune condition, mais il est évident qu'il ne peut qu'être $\equiv 5$ (mod. 8) et $\equiv 1$ (mod. 3) : il sera donc nécessairement de la forme $24g + 13$.

L'exemple le plus simple est celui de

$$m = 5.5,$$

ou de

$$m = 25.$$

Or on a l'équation canonique

$$25 = 12.1^2 + 13.1^2.$$

Soit ensuite

$$m = 5.29,$$

c'est-à-dire

$$m = 145.$$

On aura de même l'équation canonique

$$145 = 12.3^2 + 37.1^2.$$

On n'en a pas en retranchant 12 de 145, car le reste 133 qu'on obtient ainsi est le produit de 7 par 19.

Soit enfin

$$m = 29.29,$$

c'est-à-dire

$$m = 841.$$

Les équations canoniques seront alors au nombre de trois

$$841 = 12.1^2 + 829.1^2,$$
$$841 = 12.3^2 + 733.1^2,$$
$$841 = 12.5^2 + 541.1^2,$$

où 829, 733 et 541 sont des nombres premiers. On ne trouve pas d'équation canonique en retranchant 12.7^2 de 841, car le reste 253 est le produit de 11 par 23. Ainsi, dans ce dernier exemple, comme dans ceux qui précèdent et dans tous ceux qu'on pourrait ajouter, notre théorème a lieu.