JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

Théorème concernant le produit de deux nombres premiers, l'un de la forme $8\mu + 1$, l'autre de la forme $8\nu + 3$

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 6 (1861), p. 187-188.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1861_2_6__187_0>

THÉORÈME

CONCERNANT

LE PRODUIT DE DEUX NOMBRES PREMIERS, L'UN DE LA FORME $8\mu+1$, L'AUTRE DE LA FORME $8\nu+3$;

Par M. J. LIOUVILLE.

Soient a et b deux nombres premiers donnés, a de la forme $8\mu + 1$, b de la forme $8\nu + 3$. Considérons leur produit ab, que nous représenterons par m, et faisons de toutes les manières possibles

$$m = x^2 + 2p^{4l+1}y^2,$$

x et y étant des entiers impairs, et p un nombre premier, de la forme $8g + 5$, et non diviseur de y. On veut savoir à priori par une règle facile si le nombre N des décompositions de m ainsi obtenues sera pair ou impair, zéro étant compté comme nombre pair.

Or a étant un nombre premier $8\mu + 1$, on peut poser d'une seule manière, en nombres entiers,

$$a = r^2 + 8s^2,$$

et je trouve que l'on a toujours $\mathrm{N} \equiv s \pmod{2}$, en sorte que N est pair quand s est pair, mais impair quand s est impair.

Nous exigeons que p soit de la forme $8g + 5$. Cette condition pourrait être remplacée par une autre qui porterait sur x. En effet, le produit m est toujours de la forme $8n + 3$, mais tantôt n est pair ($n = 2k$), tantôt n est impair ($n = 2k + 1$). Cela observé, on conclura aisément de l'équation

$$m = x^2 + 2p^{4l+1}y^2,$$

que pour que p soit de la forme $8g + 5$, il faut et il suffit que x soit de la forme $8t \pm 3$ quand n est pair, et de la forme $8t \pm 1$ quand n est impair. Ainsi, pour les produits m de la forme $16k + 3$, on devra prendre pour x^2 les termes de la suite

$$3^2,\ 5^2,\ 11^2,\ 13^2, \ldots,$$

tandis que pour les produits m de la forme $16k + 11$, les valeurs de x^2 à employer seront

$$1^2,\ 7^2,\ 9^2,\ 15^2, \ldots.$$

Pour

$$a = 17 = 3^2 + 8.1^2,$$

on a $s = 1$, donc N impair. Avec $a = 17$, soit d'abord $b = 3$, d'où le produit 17.3, ou 51, qui appartient à la forme $16k + 3$. On trouve pour ce produit (conformément à notre théorème) l'équation canonique

$$51 = 5^2 + 2.13.1^2.$$

Soit ensuite $b = 11$. Le produit 17.11, ou 187, appartiendra cette fois à la forme $16k + 11$, et l'on aura encore une seule équation canonique

$$187 = 9^2 + 2.53.1^2.$$

Pour

$$a = 41 = 3^2 + 8.2^2,$$

on a au contraire $s = 2$, donc N pair. Et en effet on trouve alors N égal à 2 pour $b = 3$, c'est-à-dire pour le produit 123, qui est de la forme $16k + 11$, et qui donne lieu aux équations canoniques

$$123 = 1^2 + 2.61.1^2, \quad 123 = 7^2 + 2.37.1^2.$$