JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

Théorème concernant le produit de deux nombres premiers égaux ou inégaux de la forme $8\mu + 3$

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 6 (1861), p. 185-186.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1861_2_6__185_0>

THÉORÈME

CONCERNANT

LE PRODUIT DE DEUX NOMBRES PREMIERS ÉGAUX OU INÉGAUX DE LA FORME $8\mu+3$;

Par M. J. LIOUVILLE.

Dans le cahier d'août 1860, nous nous sommes occupés du produit de deux nombres premiers, l'un de la forme $16k+3$, l'autre de la forme $16h+5$. C'était un premier pas dans une voie qui sera féconde. Nous allons donner dans cet article et dans les suivants d'autres propositions du même genre. Il nous semble que ces théorèmes concernant un produit de deux nombres premiers n'offrent pas moins d'intérêt que ceux qui se rapportent aux nombres premiers pris isolément.

Soient a et b deux nombres premiers, égaux ou inégaux, mais tous deux $\equiv 3 \pmod{8}$. Le produit ab, que je représenterai par m, jouira d'une propriété dont nous voulons dire ici deux mots.

Cette propriété consiste en ce que, pour chaque produit m, on peut poser au moins une fois, et toujours un nombre impair de fois, l'équation

$$m = 4x^2 + p^{4l+1}y^2,$$

x et y étant des entiers impairs, et p un nombre premier qui ne divise pas y. Nous admettons pour l la valeur zéro. Quant au nombre premier p, nous ne le soumettons à priori à aucune condition, mais vu la forme donnée des facteurs a et b de m, et x, y étant impairs, il est évident qu'il ne pourra être que de la forme $8g+5$.

En supposant égal à 3 un des deux nombres premiers a, b dont m est le produit, on retomberait sur un théorème que nous avons donné déjà (cahier de décembre 1860). Dans les exemples qui vont suivre, nous avons donc pris a et $b > 3$.

Premier exemple : $a = 11$, $b = 11$, $m = 121$. — Notre théorème se trouve vérifié, eu égard à l'équation canonique

$$121 = 4.1^2 + 13.3^2.$$

Deuxième exemple : $a = 11$, $b = 19$, $m = 209$. — Notre théorème est encore vérifié, mais il y a cette fois trois équations canoniques, savoir

$$209 = 4.3^2 + 173.1^2,$$
$$209 = 4.5^2 + 109.1^2,$$
$$209 = 4.7^2 + 13.1^2.$$

Troisième exemple : $a = 19$, $b = 19$, $m = 361$. — Même vérification, et les trois équations canoniques ci-après :

$$361 = 4.3^2 + 13.5^2,$$
$$361 = 4.5^2 + 29.3^2,$$
$$361 = 4.9^2 + 37.1^2.$$

On prolongera aisément, si on le désire, ces exercices numériques : partout, notre théorème aura lieu.