JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

Théorème concernant les nombres premiers de l'une ou de l'autre des deux formes $120\kappa + 61$, $120\kappa + 109$

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 6 (1861), p. 150-152.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1861_2_6__150_0>

THÉORÈME

CONCERNANT

LES NOMBRES PREMIERS DE L'UNE OU DE L'AUTRE DES DEUX FORMES $120k+61$, $120k+109$;

PAR M. J. LIOUVILLE.

Soit m un nombre premier donné, de l'une ou de l'autre des deux formes

$$120k+61, \qquad 120k+109.$$

Nous aurons pour le nombre m dont il s'agit ce théorème, que l'on peut poser au moins une fois (et toujours un nombre impair de fois) l'équation

$$m = 30x^2 + p^{4l+1}y^2,$$

x et y étant des entiers impairs et p un nombre premier ($120g+31$ ou $120g+79$) non diviseur de y : on admet pour l la valeur zéro.

En d'autres termes, si d'un nombre premier m, de l'une ou de l'autre des deux formes $120k+61$, $120k+109$, on retranche, tant que faire se peut, les entiers compris dans la suite

$$30.1^2,\ 30.3^2,\ 30.5^2,\ldots,$$

il y aura un nombre impair de restes susceptibles d'être mis sous la forme

$$p^{4l+1}y^2,$$

p étant un nombre premier non diviseur de y. Quant à la forme linéaire ($120g+31$ ou $120g+79$) que nous attribuons à p, c'est une conséquence immédiate de notre équation

$$m = 30x^2 + p^{4l+1}y^2,$$

qui, dans les conditions où nous nous sommes placés, entraîne ces trois congruences :

$$p \equiv 7 \pmod{8}, \quad p \equiv 1 \pmod{3}, \quad p \equiv \pm 1 \pmod{5}.$$

Donnons quelques exemples numériques, en considérant successivement les nombres premiers m de la forme $120k + 61$, puis les nombres premiers m de la forme $120k + 109$.

Les nombres premiers les plus petits de la forme

$$120k + 61,$$

sont 61, 181, 421, 541, 661 ; et pour chacun d'eux on peut écrire une seule équation canonique, savoir

$$61 = 30.1^2 + 31.1^2,$$
$$181 = 30.1^2 + 151.1^2,$$
$$421 = 30.3^2 + 151.1^2,$$
$$541 = 30.3^2 + 271.1^2,$$
$$661 = 30.1^2 + 631.1^2.$$

On n'a pas d'équation canonique en retranchant 30 de 421 et de 541, ni en retranchant 30.3^2, ou 270, de 661. En effet, des trois restes qu'on obtient ainsi, le second, 511, est le produit des deux nombres premiers 7 et 73, et les deux autres sont égaux à 391, c'est-à-dire à 17.23.

Même vérification de notre théorème pour les nombres premiers de la forme

$$120k + 109.$$

Les trois plus petits sont 109, 229, 349; et l'on a les équations canoniques

$$109 = 30.1^2 + 79.1^2,$$
$$229 = 30.1^2 + 199.1^2,$$
$$349 = 30.3^2 + 79.1^2.$$

On n'en obtient pas en retranchant 30 de 349, attendu que le reste, 319, est le produit des deux nombres premiers 11 et 29.

Soit, pour terminer,

$$m = 709,$$

et nous verrons que là encore notre théorème est vérifié, à cause de l'équation canonique

$$709 = 30.3^2 + 439.1^2.$$