JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES
FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874
PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

Théorèmes concernant le quintuple d'un nombre premier de la forme $24\kappa + 17$

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 6 (1861), p. 147-149.
<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1861_2_6__147_0>

THÉORÈMES

CONCERNANT

LE QUINTUPLE D'UN NOMBRE PREMIER DE LA FORME $24k + 17$;

PAR M. J. LIOUVILLE.

Nous considérons ici le quintuple d'un nombre premier m de la forme $24k + 17$. Le nombre N de manières dont on peut poser, pour chaque entier m de l'espèce indiquée, l'équation

$$5m = 2x^2 + p^{4l+1}y^2,$$

x et y étant des entiers impairs et p un nombre premier non diviseur de y, est essentiellement pair, mais au moins égal à 2. Cela résultera des deux théorèmes qui font l'objet de cet article. On va le voir en effet, N est la somme de deux nombres impairs N_1, N_2 qui répondent respectivement aux deux hypothèses distinctes de x divisible par 3 et de x premier à 3. Quant à y, on s'assurera sans peine qu'il n'est jamais divisible par 3.

Théorème I. — « Pour tout nombre premier donné m, de la forme » $24k + 17$, on peut poser au moins une fois (et toujours un nombre » impair de fois) l'équation

$$5m = 18x^2 + p^{4l+1}y^2,$$

» x et y étant des entiers impairs et p un nombre premier non divi- » seur de y. »

Le nombre premier p, qui figure au second membre de l'équation

$$5m = 18x^2 + p^{4l+1}y^2,$$

doit, dans les conditions où nous nous sommes placés, vérifier les deux congruences

$$p \equiv 3 \pmod{8}, \qquad p \equiv 1 \pmod{3};$$

il ne peut donc être que de la forme $24g + 19$.

Les exemples les plus simples sont ceux de

$$m = 17, \quad m = 41, \quad m = 89.$$

Pour chacun des nombres que je viens d'écrire, on trouve une équation canonique, savoir

$$5.17 = 18.1^2 + 67.1^2,$$

puis

$$5.41 = 18.3^2 + 43.1^2,$$

enfin

$$5.89 = 18.3^2 + 283.1^2.$$

Même vérification pour

$$m = 113, \quad m = 137;$$

car on a

$$5.113 = 18.1^2 + 547.1^2,$$

et

$$5.137 = 18.3^2 + 523.1^2.$$

Nous ne pousserons pas plus loin les exemples.

Théorème II. — « Pour tout nombre premier donné m, de la » forme $24k + 17$, on peut poser au moins une fois (et toujours un » nombre impair de fois) l'équation

$$5m = 2x^2 + p^{4l+1} y^2,$$

» x et y étant des entiers impairs, non divisibles par 3, et p un » nombre premier qui ne divise pas y. »

Dans les conditions spéciales de cet énoncé, le nombre premier p

doit vérifier les deux congruences

$$p \equiv 3 \pmod{8}, \qquad p \equiv 2 \pmod{3};$$

il ne peut donc être que de la forme $24g + 11$.

Vérifions à son tour le théorème II, en prenant d'abord

$$m = 17,$$

puis

$$m = 41.$$

Pour chacun de ces deux nombres, on trouve une équation canonique :

$$5.17 = 2.1^2 + 83.1^2,$$

puis

$$5.41 = 2.7^2 + 107.1^2.$$

On a trois équations canoniques pour

$$m = 89,$$

savoir

$$5.89 = 2.1^2 + 443.1^2,$$
$$5.89 = 2.7^2 + 347.1^2,$$
$$5.89 = 2.13^2 + 107.1^2;$$

trois aussi pour

$$m = 113,$$

car

$$5.113 = 2.1^2 + 563.1^2,$$
$$5.113 = 2.7^2 + 467.1^2,$$
$$5.113 = 2.13^2 + 227.1^2.$$

Ces exemples suffiront