JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

Théorèmes concernant le quintuple d'un nombre premier de l'une ou de l'autre des deux formes $40\mu + 7, 40\mu + 23$

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 6 (1861), p. 109-112.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1861_2_6__109_0>

THÉORÈMES

CONCERNANT

LE QUINTUPLE D'UN NOMBRE PREMIER DE L'UNE OU DE L'AUTRE DES DEUX FORMES $40\mu + 7$, $40\mu + 23$;

PAR M. J. LIOUVILLE.

Nous avons déjà donné (dans le cahier d'octobre 1860) deux théorèmes concernant respectivement les nombres premiers $40\mu + 7$ et les nombres premiers $40\mu + 23$: l'énoncé changeait suivant qu'on s'occupait de l'une ou de l'autre de ces deux classes de nombres premiers. Ici, au contraire, nous mêlons les deux classes et nous considérons le quintuple $(5m)$ d'un nombre premier m qui peut être indifféremment de la forme $40\mu + 7$ ou de la forme $40\mu + 23$ sans que nos énoncés changent.

Théorème I. — « Pour chaque nombre premier m, de l'une ou de » l'autre des deux formes $40\mu + 7$, $40\mu + 23$, on peut poser au » moins une fois (et toujours un nombre impair de fois) l'équation

$$5m = (10t + 1)^2 + 2p^{4l+1}y^2,$$

» t étant un entier quelconque, pair ou impair, positif, nul ou néga- » tif, tandis que y et p sont impairs et positifs, de plus p premier et » non diviseur de y. »

En d'autres termes, si du quintuple d'un nombre premier, de l'une ou de l'autre des deux formes

$$40\mu + 7, \quad 40\mu + 23,$$

on retranche, tant que faire se peut, les termes de la suite

$$1^2,\ 9^2,\ 11^2,\ 19^2,\ 21^2, \ldots,$$

que la formule

$$(10t+1)^2$$

fournit en y prenant $t=0$, $t=\pm 1$, $t=\pm 2,\ldots$, il y aura un nombre impair de restes susceptibles d'être mis sous la forme

$$2p^{4l+1}y^2,$$

p étant un nombre premier non diviseur de y.

Il est bien évident que l'entier y est impair. Quant à la forme linéaire du nombre premier p, nous remarquerons que, dans les conditions où nous nous sommes placés, l'équation

$$5m=(10t+1)^2+2p^{4l+1}y^2$$

entraîne ces deux congruences

$$p\equiv 1 \pmod{4}$$

et

$$p\equiv \pm 3 \pmod{5}.$$

Il s'ensuit que p est de l'une des deux formes

$$20\nu+13,\quad 20\nu+17.$$

Nous nous bornerons aux exemples les plus simples en prenant d'abord $m=7$, $m=23$, $m=47$. Pour chacun de ces nombres, on trouve une seule équation canonique, savoir

$$5.7=1^2+2.17.1^2,$$

puis

$$5.23=9^2+2.17.1^2,$$

enfin

$$5.47=1^2+2.13.3^2.$$

Notre théorème se vérifie également pour $m=103$; mais on a alors trois équations canoniques :

$$5.103 = 1^2 + 2.257.1^2,$$
$$5.103 = 11^2 + 2.197.1^2,$$
$$5.103 = 21^2 + 2.37.1^2.$$

Théorème II. — « Pour chaque nombre premier m, de l'une ou de » l'autre des deux formes $40\mu + 7$, $40\mu + 23$, on peut poser au » moins une fois (et toujours un nombre impair de fois) l'équation

$$5m = (10t + 3)^2 + 2p^{4l+1}y^2,$$

» t étant un entier quelconque, pair ou impair, positif, nul ou négatif, » tandis que y et p sont impairs et positifs, de plus p premier et non » diviseur de y. »

En d'autres termes, si du quintuple d'un nombre premier, de l'une ou de l'autre des deux formes

$$40\mu + 7, \quad 40\mu + 23,$$

on retranche, tant que faire se peut, les termes de la suite

$$3^2,\ 7^2,\ 13^2,\ 17^2,\ 23^2, \ldots,$$

que la formule

$$(10t + 3)^2$$

fournit en y prenant $t = 0$, $t = \pm 1$, $t = \pm 2$, etc., il y aura un nombre impair de restes susceptibles d'être mis sous la forme

$$2p^{4l+1}y^2,$$

p étant un nombre premier, non diviseur de y.

Il est bien évident que l'entier y est impair. Quant au nombre premier p, on trouve, comme pour le théorème I, qu'il doit être de l'une des deux formes

$$20\nu + 13, \quad 20\nu + 17.$$

Cette fois encore, nous nous bornerons aux exemples les plus simples. Faisant d'abord $m = 7$, $m = 23$, $m = 47$, nous trouverons notre théorème confirmé par les équations canoniques respectives

$$5.7 = 3^2 + 2.13.1^2,$$

puis

$$5.23 = 3^2 + 2.53.1^2,$$

enfin

$$5.47 = 3^2 + 2.113.1^2.$$

Il l'est également pour $m = 103$; car on a alors les trois équations canoniques que voici :

$$5.103 = 7^2 + 2.233.1^2,$$
$$5.103 = 13^2 + 2.173.1^2,$$
$$5.103 = 17^2 + 2.113.1^2.$$

Nous ne voyons aucun intérêt à pousser plus loin ces vérifications numériques.