JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

Théorème concernant les nombres premiers de la forme $24\kappa + 1$

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 6 (1861), p. 103-104.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1861_2_6__103_0>

THÉORÈME
CONCERNANT LES NOMBRES PREMIERS DE LA FORME $24k+1$;

PAR M. J. LIOUVILLE.

Soit m un nombre premier de la forme $24k+1$. Je pose de toutes les manières possibles l'équation

$$m = 12x^2 + p^{4l+1}y^2,$$

x et y étant des entiers impairs et p un nombre premier qui ne divise pas y : j'admets pour l la valeur zéro. On demande une règle simple qui dise à priori si le nombre N des décompositions de m sous la forme indiquée est pair ou impair.

Nous répondrons à cette question en remarquant que pour tout nombre premier m de la forme $24k+1$, on peut poser, d'une seule manière, en nombres entiers, l'équation

$$m = a^2 + 24b^2,$$

et en ajoutant que l'on a toujours

$$\mathrm{N} \equiv b \pmod{2},$$

en sorte que N est pair quand b est pair, mais impair quand b est impair. Nous n'avons pas besoin d'avertir que zéro est compté comme nombre pair.

Les quatre nombres premiers les plus petits que la formule $24k+1$ fournisse sont

$$73 = 7^2 + 24.1^2,$$
$$97 = 1^2 + 24.2^2,$$
$$193 = 13^2 + 24.1^2,$$
$$241 = 5^2 + 24.3^2.$$

Pour le second de ces nombres, b est pair, N doit donc aussi l'être. Pour les trois autres, b étant impair, N doit être impair. Or il est aisé, en effet, de s'assurer que notre équation

$$m = 12x^2 + p^{4l+1}y^2$$

est impossible pour $m = 97$, de façon qu'alors $N = 0$, tandis que l'on a $N = 1$, relativement aux trois autres valeurs de m citées plus haut 73, 193, 241; c'est ce que prouve pour 73 l'équation canonique

$$73 = 12.1^2 + 61.1^2,$$

puis pour 193 et 141 les équations canoniques respectives

$$193 = 12.1^2 + 181.1^2$$

et

$$241 = 12.1^2 + 229.1^2.$$

Il est bon de faire observer que les nombres premiers qui figurent aux seconds membres des équations que nous venons d'écrire sont tous de la forme $24g + 13$. C'est qu'en effet, dans les conditions où nous nous sommes placés, l'équation

$$m = 12x^2 + p^{4l+1}y^2$$

entraîne les deux congruences

$$p \equiv 5 \pmod{8}$$

et

$$p \equiv 1 \pmod{3},$$

d'où résulte nécessairement

$$p = 24g + 13.$$