JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

M. CHASLES

Résumé d'une théorie des coniques sphériques homofocales et des surfaces du second ordre homofocales

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 5 (1860), p. 425-454.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1860_2_5__425_0>

RÉSUMÉ

D'UNE

THÉORIE DES CONIQUES SPHÉRIQUES HOMOFOCALES

ET DES

SURFACES DU SECOND ORDRE HOMOFOCALES [*];

PAR M. CHASLES.

(Extrait des *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*; t. L, p. 623, 1055 et 1110; séances du 26 mars et des 11 et 18 juin 1860.)

CONIQUES SPHÉRIQUES HOMOFOCALES.

1. Concevons dans un plan une conique C et un cercle imaginaire; ces deux courbes donnent lieu aux propriétés suivantes :

1°. *Il existe trois points, toujours réels, dont chacun a la même droite pour polaire, dans le cercle et dans la conique.*

Cette droite est celle qui joint les deux autres points.

2°. *Il existe deux points, toujours réels, tels, que deux droites conjugées quelconques par rapport à la conique, menées par un de ces points, sont conjugées par rapport au cercle.*

En d'autres termes, ces deux points sont les points de concours des tangentes (imaginaires) communes au cercle et à la conique; ou, si l'on veut, sont les sommets réels du quadrilatère (imaginaire) circonscrit au cercle et à la conique.

3°. *Il existe deux droites toujours réelles, telles, que deux points conjugués quelconques par rapport à la conique, pris sur une de ces droites, sont conjugués par rapport au cercle.*

[*] Cette théorie est extraite du *Cours de Géométrie supérieure* professé à la Faculté des Sciences de Paris.

En d'autres termes, ces droites sont deux cordes communes au cercle et à la conique; ou, si l'on veut, sont les côtés réels du quadrilatère (imaginaire) inscrit au cercle et à la conique.

2. Soit O le centre du cercle, et $R\sqrt{-1}$ son rayon. Que par le point O on élève sur le plan de la figure une perpendiculaire OS, égale à R, le point S, extrémité de cette perpendiculaire, jouira des propriétés suivantes :

1°. *Si l'on a dans le plan de la figure un point et sa polaire relative au cercle imaginaire, la droite menée du point* S *à ce point, sera perpendiculaire au plan mené du même point* S *à la polaire.*

2°. *Les droites menées du point* S *à deux points conjugués par rapport au cercle, seront rectangulaires.*

3°. *Le plan mené du même point* S *à deux droites conjuguées par rapport au cercle, seront rectangulaires* [*].

3. Si l'on conçoit un cône qui ait pour sommet le point S, et pour base le cercle imaginaire, ce sera le cône asymptote d'une sphère, de rayon quelconque, ayant son centre en S.

Par conséquent, *la courbe d'intersection de la sphère par le cône sera le cercle imaginaire situé à l'infini.*

4. D'après cela, les propriétés du cercle imaginaire considéré sur le plan (**2**) donnent lieu aux propriétés suivantes du cercle imaginaire situé à l'infini sur la sphère :

1°. *L'arc polaire d'un point de la sphère, relatif au cercle imaginaire, est dans le plan perpendiculaire au rayon qui aboutit au point de la sphère.*

2°. *Deux points conjugués par rapport au cercle imaginaire sont distants entre eux d'un quadrant.*

3°. *Deux arcs conjugués par rapport au cercle imaginaire sont rectangulaires.*

Ces notions relatives au cercle imaginaire situé à l'infini sur la sphère, servent à démontrer, avec une facilité extrême, une foule de

---

[*] Ces propositions sont démontrées dans le *Traité de Géométrie supérieure* (ch. XXIII; p. 546-556).

propositions de la Géométrie sphérique. Mais nous ne devons les appliquer ici qu'à la théorie des coniques homofocales.

5. Concevons maintenant un cône ayant son sommet en S, et pour base la conique C :

1°. Les trois axes principaux de ce cône seront les droites menées du point S aux trois points, dont chacun a la même polaire dans la conique et dans le cercle imaginaire ;

2°. Ses deux plans cycliques [*] passeront respectivement par les deux cordes communes au cercle et à la conique ;

3°. Ses deux lignes focales seront les droites menées du point S aux deux points de concours des tangentes communes au cercle et à la conique.

6. Quand la conique C a un double contact avec le cercle imaginaire, le cône (S, C) est de révolution.

De sorte que :

Tous les cônes de révolution de même sommet, ont pour bases, sur un plan quelconque, des coniques qui ont toutes un double contact avec un même cercle imaginaire.

7. Concevons une sphère ayant son centre en S. Le cône (S, C) la coupera suivant une *conique sphérique* formée de deux courbes distinctes, égales et diamétralement opposées, qui proviennent des deux nappes du cône, et qu'on appelle *ellipses sphériques*.

Le cône qui a pour base le cercle imaginaire détermine sur la sphère, comme nous l'avons dit (3), le cercle imaginaire situé à l'infini.

Il résulte donc de ce qui précède (5) que :

Etant donnée une conique sphérique :

1°. *Il existe sur la sphère trois couples de points, opposés diamétralement deux à deux sur trois diamètres rectangulaires, tels, que l'arc*

---

[*] J'ai appelé *plans cycliques* d'un cône du second ordre, les deux plans menés par le sommet du cône parallèlement aux plans de ses sections circulaires. (*Voir* le *Mémoire sur les propriétés générales des cônes du second ordre;* inséré dans le t. VI des *Mémoires de l'Académie royale de Bruxelles*, année 1830.)

polaire de chacun d'eux par rapport à la conique passe par les points appartenant aux deux autres couples.

Ces points sont des *centres* de la conique sphérique.

2°. *Il existe deux arcs de grands cercles, tels, que deux points conjugués par rapport à la conique, pris sur un de ces arcs, sont distants d'un quadrant.*

Ces arcs sont appelés *arcs cycliques* de la conique.

3°. *Il existe deux couples de points, opposés deux à deux diamétralement, tels, que deux arcs conjugués par rapport à la conique, menés par un de ces points, sont toujours rectangulaires.*

Ces points sont appelés les *foyers* de la conique sphérique.

8. Les *centres*, les *arcs cycliques* et les *foyers* d'une conique sphérique définis ainsi par des propriétés spéciales qui ne comportent que l'idée de la conique même, sont susceptibles d'autres définitions qui dérivent de la considération du cercle imaginaire situé à l'infini. Ainsi l'on peut dire que :

1°. *Les centres d'une conique sphérique sont des points dont chacun a le même arc polaire par rapport à la conique et au cercle imaginaire situé à l'infini.*

2°. *Les arcs cycliques de la conique sont les deux arcs de grands cercles (toujours réels) sur lesquels se trouvent les points d'intersection (imaginaires) de la conique et du cercle ;* ou, si l'on veut, ces arcs sont les côtés réels du quadrilatère (imaginaire) inscrit à la conique et au cercle.

3°. *Les foyers de la conique sont les points de concours (toujours réels) des arcs tangents communs à la conique et au cercle ;* ou si l'on veut, sont les sommets réels du quadrilatère (imaginaire) circonscrit à la conique et au cercle.

On conçoit sur-le-champ combien ces nouvelles définitions, jointes aux notions premières du cercle imaginaire présentées ci-dessus (4), seront utiles dans une foule de questions, nous pourrions dire dans toutes les parties de la théorie des coniques sphériques.

Pour nous renfermer ici dans le seul sujet des coniques homofocales, nous en conclurons simplement ce principe, qui sera notre point de départ :

Deux coniques sphériques homofocales *sont deux coniques dont le quadrilatère circonscrit est aussi circonscrit au cercle imaginaire situé à l'infini.*

9. Il résulte de là que : Toutes les propriétés relatives à un système de coniques inscrites dans un même quadrilatère s'appliquent à un système de coniques homofocales.

Mais cette notion ne suffirait pas, si l'on omettait de remarquer qu'au nombre des coniques inscrites dans le quadrilatère circonscrit à un système de coniques homofocales, s'en trouve une qui n'est pas une conique homofocale, et qui néanmoins jouit des mêmes propriétés, comme conique inscrite au quadrilatère : cette courbe particulière est le cercle imaginaire situé à l'infini.

C'est la considération de ce cercle imaginaire qui conduit aux plus belles propriétés des coniques homofocales, et surtout à celles dont les démonstrations présenteraient souvent le plus de difficultés par d'autres voies.

10. Enfin, ce cercle imaginaire établit une relation fort simple entre tous les cercles tracés sur la sphère, relation singulière peut-être, mais qui nous sera d'une très-grande utilité. C'est que :

Tous les cercles (grands ou petits) tracés sur la sphère peuvent être considérés comme des coniques sphériques qui ont un double contact avec le cercle imaginaire à l'infini.

11. Après ces considérations générales et préliminaires, nous passons aux propriétés des coniques homofocales.

Ces propriétés sont extrêmement nombreuses; et leur nombre en rend l'exposition difficile, car il ne permet guère un classement méthodique qui serait si désirable.

Cependant nous avons cherché à renfermer la plupart et les plus importantes de ces propriétés dans quatre propositions très-générales, desquelles elles pussent se conclure comme simples conséquences, au moyen d'hypothèses particulières très-variées.

Voici quelles sont ces propositions générales :

Théorème I. — *Étant données deux coniques homofocales* A, A', *et une* *troisième conique quelconque* U, *si dans les quadrilatères* $\boxed{\text{UA}}$ [*] *et* $\boxed{\text{UA}'}$ *on inscrit deux coniques quelconques* B, B′ : *le quadrilatère* $\boxed{\text{BB}'}$ *sera circonscrit tout à la fois à une conique homofocale aux deux* A, A′, *et à une conique homofocale à* U.

Théorème II. — *Etant données deux coniques homofocales* A, A′ *et une troisième conique quelconque* U, *si dans le quadrilatère* $\boxed{\text{UA}}$ *on inscrit une conique* B : *on pourra inscrire dans le quadrilatère* $\boxed{\text{UA}'}$ *une conique* B′ *homofocale à* B.

Théorème III. — *Etant données trois coniques homofocales* A, A′, A″ *et une quatrième conique* U, *si dans les deux quadrilatères* $\boxed{\text{UA}}$, $\boxed{\text{UA}'}$ *on inscrit deux coniques* B, B′ : *les deux quadrilatères* $\boxed{\text{AU}''}$ *et* $\boxed{\text{BB}'}$ *seront circonscrits à une même conique* B″.

Théorème IV. — *Quand trois coniques quelconques* A, B, C *sont inscrites dans un même quadrilatère, si l'on décrit deux coniques* A′, B′ *homofocales à* A *et* B, *respectivement : on pourra inscrire dans le quadrilatère* $\boxed{\text{A}'\text{B}'}$ *une conique* C′ *homofocale à la troisième conique* C;

Et les deux quadrilatères $\boxed{\text{ABC}}$, $\boxed{\text{A}'\text{B}'\text{C}'}$ *auront leurs huit côtés tangents à une même conique.*

Conséquences du théorème I.

12. La conique U est un arc de grand cercle limité à deux points :

Quand deux coniques sont homofocales, si de deux points de la

---

[*] Nous désignons par $\boxed{\text{UA}}$ le quadrilatère circonscrit aux deux coniques U et A, c'est-à-dire le quadrilatère formé par les quatre arcs de grands cercles (réels ou imaginaires) tangents aux deux coniques.

sphère on mène quatre arcs de grands cercles tangents à chacune d'elles, et formant ainsi deux quadrilatères circonscrits à ces courbes; et que dans ces quadrilatères on inscrive deux coniques quelconques B, B' : *le quadrilatère circonscrit à ces deux-ci sera circonscrit tout à la fois à une conique homofocale aux proposées, et à une conique ayant pour foyers les deux points pris sur la sphère.*

On peut prendre pour les coniques B et B' des arcs diagonaux limités chacun à deux sommets opposés du quadrilatère auquel chacune de ces coniques doit être inscrite.

13. Si les deux points pris sur la sphère s'approchent indéfiniment, et, à la limite, coïncident, le théorème prend cet énoncé :

Étant données deux coniques homofocales, si d'un point u *de la sphère, on leur mène des arcs tangents* [*], *et que par les points de contact sur chacune on mène une autre conique tangente en ces points à la même courbe : le quadrilatère circonscrit aux deux nouvelles coniques sera circonscrit tout à la fois à une conique homofocale aux proposées, et à un petit cercle ayant son centre sphérique en* u.

En raison de ce cercle, on peut ajouter, d'après un théorème ci-dessous (**20**), que : *Deux sommets opposés du quadrilatère sont situés sur une conique homofocale aux proposées; et les arcs tangents à cette conique en ces points passent par le centre sphérique du cercle.*

14. On peut prendre pour les coniques B, B' les arcs de cercle limités aux points de contact des arcs tangents aux deux coniques proposées; il s'ensuit cet énoncé :

Quand deux coniques sont homofocales, si d'un point u *de la sphère on leur mène des arcs tangents, et qu'on joigne par des arcs les points de contact de la première aux points de contact de la seconde : le quadrilatère formé par ces arcs sera circonscrit tout à la fois à une troisième conique homofocale aux proposées, et à un petit cercle ayant son centre sphérique en* u.

15. La conique U a un double contact avec A, et on prend pour la conique B le pôle de contact :

---

[*] Il s'agira toujours, dans ce qui va suivre, d'arcs de grands cercles.

Étant données deux coniques homofocales A, A′ *et une conique* U *qui ait un double contact avec* A, *si dans le quadrilatère* $\boxed{\mathrm{UA'}}$ *on inscrit une conique* B′, *et que du pôle de contact des deux coniques* U, A *on mène deux arcs tangents à cette courbe* B′ : *les deux points de contact seront sur deux coniques tangentes en ces points aux deux arcs menés par le pôle de contact, et dont l'une sera homofocale aux coniques* A, A′, *et l'autre homofocale à la conique* U.

16. On peut prendre pour la conique B′ une diagonale du quadrilatère $\boxed{\mathrm{UA'}}$ et pour la conique U l'arc limité aux deux points de contact sur A; le théorème devient :

Quand deux coniques A, A′ *sont homofocales, si de deux points* u, u_1 *de la première on mène quatre arcs tangents à la seconde : deux sommets opposés du quadrilatère formé par ces quatre arcs seront sur deux coniques tangentes en ces points aux arcs menés par le pôle de l'arc* uu_1, *et dont l'une sera homofocale aux coniques* A, A′, *et l'autre aura pour foyers les deux points* u, u_1.

17. Si la conique U, dans le théorème I, est un petit cercle de la sphère, le quadrilatère $\boxed{\mathrm{BB'}}$ sera circonscrit à un autre cercle de même centre sphérique.

Deux sommets opposés du quadrilatère seront situés sur une conique homofocale aux proposées et dont les arcs tangents en ces points passeront par le centre sphérique du cercle.

Si l'on suppose que le cercle devienne infiniment petit et se réduise à un point, on retrouve le théorème (**13**).

18. Quand la conique U est un petit cercle, comme nous venons de le supposer, on peut dire qu'elle a un double contact avec le cercle imaginaire situé à l'infini (**10**). Considérons celui-ci à l'instar des coniques homofocales (**9**), et prenons-le pour la conique A dans le théorème (**15**) ci-dessus, on aura cet énoncé :

Etant donnés deux petits cercles de même centre sphérique, U *et* B, *et une conique sphérique* A′, *si l'on inscrit dans le quadrilatère* $\boxed{\mathrm{UA'}}$

une conique quelconque B′ : *le quadrilatère* $\boxed{\mathrm{B\,B'}}$ *sera circonscrit à une conique homofocale à* A′.

19. On prend pour le cercle B le centre du cercle U; il en résulte que :

Étant donnés un petit cercle U *et une conique* A′, *si dans le quadrilatère* $\boxed{\mathrm{U\,A'}}$ *on inscrit une conique* B′, *et que du centre du cercle* U *on mène deux arcs tangents à cette conique : les deux points de contact seront sur une conique homofocale à* A′ *et tangente en ces points aux deux arcs menés par le centre du cercle* U.

20. Prenons pour la conique B′ l'arc diagonal limité à deux sommets opposés du quadrilatère $\boxed{\mathrm{U\,A'}}$; il en résulte que :

Quand un quadrilatère est circonscrit à une conique A′ *et à un cercle* U : *deux sommets opposés sont une conique homofocale à* A′; *et les arcs tangents à cette conique en ces points passent par le centre sphérique du cercle* [*].

Conséquences du théorème II.

21. La conique U peut être un arc de grand cercle limité à deux

---

[*] *Corollaire.* Quand le cercle est tangent à la conique en un point *d*, le quadrilatère circonscrit devient un triangle *abc*, dont le côté *ac* est l'arc tangent aux deux courbes en leur point de contact *d*; les côtés *ab*, *bc* sont les deux autres arcs tangents communs à ces courbes.

Les deux sommets *a*, *c* du triangle représentent deux sommets opposés du quadrilatère primitif; par conséquent *ils sont sur une conique homofocale à la proposée, et les arcs tangents à cette courbe en ces points passent par le centre sphérique du cercle.* Pareillement, le troisième sommet *b* du triangle et le point de contact *d* du côté *ac* représentent les deux autres sommets opposés du quadrilatère, et sont, par conséquent, *sur une autre conique homofocale, dont les arcs tangents en ces points passent aussi par le centre sphérique du cercle.*

Cette conique est déterminée par le seul point *d*; de sorte que si l'on a une infinité de cercles tangents à la conique au même point *d*, le lieu des sommets *b* des angles sphériques circonscrits à la conique et à chaque cercle est une conique homofocale.

Mais c'est surtout la première partie du théorème, savoir, que les deux sommets *a*, *c* points. Ces points peuvent coïncider; dans ce cas, le théorème prend cet énoncé :

Quand deux coniques spheriques A, A′ *sont homofocales, si d'un point* u *de la sphère on leur mène des arcs tangents, et que par les points de contact de la première* A *on mène une conique* B *tangente à* A *en ces points : par les points de contact de la seconde* A′ *on pourra mener une conique* B′ *tangente à* A′ *en ces points et homofocale à* B.

22. On peut prendre pour la conique B l'arc de grand cercle limité aux deux points de contact de A; il s'ensuit que :

Quand deux coniques A, A′ *sont homofocales; si d'un point de la sphère on leur mène des arcs tangents : on pourra faire passer par les deux points de contact de l'une une conique tangente à celle-ci en ces points et ayant pour foyers les deux points de contact de l'autre.*

De sorte qu'on peut dire :

Quand deux coniques A, A′ *sont homofocales : deux points de l'une* A *peuvent être pris pour les foyers d'une conique qui ait un double contact avec l'autre* A′; *les arcs tangents à celle-ci, menés par les deux points de contact, passeront par le point de concours des arcs tangents à la première* A *menés par les deux points pris sur cette courbe.*

23. La conique U a un double contact avec A, et on prend pour la conique B le pôle de contact; il s'ensuit que :

Quand deux coniques A, A′ *sont homofocales, si une conique* U *a un double contact avec la première : le quadrilatère* $\boxed{\mathrm{U\,A'}}$ *sera circonscrit à un cercle dont le centre sphérique sera le pôle de contact des deux coniques* A *et* U.

24. On peut prendre pour la conique U un arc limité à deux points de A; il s'ensuit que :

---

du triangle sont sur une conique homofocale à la proposée, qui offre de l'intérêt; car elle conduit immédiatement à une belle propriété du polygone d'un nombre de côtés donné, circonscrit à une conique sphérique, de périmètre minimum, savoir que *les sommets de ce polygone sont situés sur une conique homofocale;* ce qui a lieu aussi pour la portion de polygone, d'un nombre de côtés donné, de périmètre minimum, circonscrite à un arc donné de conique sphérique.

Quand deux coniques A, A′ *sont homofocales, si de deux points* u, u_1 *de la première on mène des arcs tangents à la seconde : le quadrilatère formé par ces arcs est circonscrit à un cercle dont le centre sphérique est le point de concours des arcs tangents à la conique* A *en ses deux points* u, u_1.

En d'autres termes : *Quand deux sommets opposés d'un quadrilatère circonscrit à une conique sphérique* A′ *sont situés sur une conique homofocale* A : *ce quadrilatère est circonscrit à un petit cercle dont le centre sphérique est au point de concours des arcs tangents à la conique* A *menés par les deux sommets du quadrilatère* [*].

Cette proposition est la réciproque du théorème (**20**).

25. La conique U a un double contact avec A, et on prend pour la conique B l'arc qui joint les deux points de contact :

Quand deux coniques A, A′ *sont homofocales, si une conique* U *a un double contact avec* A : *on pourra inscrire dans le quadrilatère* $\boxed{\mathrm{U\,A'}}$ *une conique ayant pour foyers les deux points de contact de* U *avec* A.

Conséquences du théorème III.

26. Supposons que la conique U se réduise à un point; il s'ensuivra que :

Quand trois coniques A, A′, A″ *sont homofocales, si d'un point* u *de la sphère on leur mène des arcs tangents ; et que par les points de contact des deux premières on mène deux autres coniques* B, B′ *tangentes à ces courbes en ces points : on pourra inscrire dans le quadrilatère*

---

[*] Ce théorème, sauf la détermination du centre du cercle, se trouve dans le *Mémoire sur les propriétés des arcs d'une conique dont la différence est rectifiable* (voir *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences;* t. XVII, p. 841 ; année 1843). Il a une grande importance, parce que c'est de là que se déduisent les belles propriétés des polygones de périmètre minimum circonscrits à des arcs de coniques, qui sont le sujet de ce Mémoire. En faisant connaître ces propriétés pour les coniques planes, j'ai annoncé qu'elles s'appliquaient aux coniques sphériques, et que c'était même un des avantages inhérents au point de vue géométrique sous lequel je considérais ces questions.

$\boxed{BB'}$ *une conique* B″ *tangente à la troisième conique homofocale* A″ *en ses deux points de contact par les arcs menés du point* u.

27. On peut prendre pour les coniques B, B′ les arcs limités aux points de contact des coniques A, A′. Donc :

Quand trois coniques A, A′, A″ *sont homofocales, si d'un point de la sphère on mène des arcs tangents aux deux premières* A, A′, *et qu'on joigne les deux points de contact de* A *aux points de contact de* A′ *par quatre arcs de grands cercles : on pourra inscrire dans le quadrilatère formé par ces arcs une conique ayant un double contact avec la troisième conique* A″ ; *les arcs tangents à ces deux courbes en leurs points de contact passeront par le point pris sur la sphère.*

Si dans ce théorème et le précédent on prend, à la place de la troisième conique A‴, le cercle imaginaire situé à l'infini, on retrouve la seconde partie des théorèmes (**13** et **14**).

Conséquences du théorème IV.

28. On peut prendre pour les coniques B, B′ les arcs limités respectivement aux foyers des deux courbes A, A′ ; on en conclut que :

Quand trois coniques quelconques A, B, C *sont inscrites dans un même quadrilatère : les arcs menés des foyers de la première aux foyers de la seconde forment un quadrilatère dans lequel on peut inscrire une conique homofocale à la troisième ;*

Ce quadrilatère et celui dans lequel sont inscrites les trois coniques proposées ont leurs huit côtés tangents à une même conique.

29. Que l'une des trois coniques soit un cercle, C par exemple, il suit alors du théorème général que :

Quand deux coniques A, B *sont inscrites dans un quadrilatère circonscrit à un cercle, si l'on décrit deux coniques* A′, B′ *qui leur soient homofocales, une à une respectivement : le quadrilatère circonscrit à ces deux coniques sera circonscrit à un cercle ayant le même centre sphérique que le premier ;*

Et les deux quadrilatères auront leurs huit côtés tangents à une même conique.

30. On peut prendre pour les deux coniques A′, B′ les arcs limités aux foyers de A et de B. Donc :

Quand deux coniques A, B *sont inscrites dans un quadrilatère circonscrit à un cercle : les arcs de grands cercles menés des foyers de l'une aux foyers de l'autre forment un quadrilatère circonscrit à un second cercle qui a le même centre sphérique que le premier ;*

Ce quadrilatère et celui qui est circonscrit aux coniques proposées ont leurs huit côtés tangents à une même conique.

31. Quand les deux coniques A, B ont un double contact, on peut prendre pour la troisième C, soit le pôle de contact, soit l'arc de grand cercle limité aux deux points de contact; il en résulte ce théorème :

Quand deux coniques A, B *ont un double contact, si l'on décrit deux autres coniques* A′, B′ *qui leur soient homofocales, une à une respectivement : on pourra inscrire dans le quadrilatère* $\boxed{A'B'}$, *premièrement un cercle ayant pour centre sphérique le pôle de contact des deux coniques* A, B; *secondement une conique ayant pour foyers les deux points de contact de ces courbes* A *et* B; *et troisièmement une conique tangente à ces deux* A, B *en leurs deux points de contact.*

On peut prendre pour les deux coniques A′, B′ les arcs limités aux foyers des deux proposées A, B.

32. La conique B peut être l'arc limité à deux points b, b_1 de A; il en résulte ce théorème :

Quand on a deux coniques homofocales A, A′, *si l'on décrit une troisième conique quelconque* B′ *qui ait pour foyers deux points* b, b_1 *de* A : *le quadrilatère* $\boxed{A'B'}$ *sera circonscrit à un cercle ayant pour centre sphérique le point de concours des arcs tangents à* A *en ses points* b, b_1;

Et dans ce quadrilatère on pourra inscrire une conique tangente à A *aux deux points* b, b_1.

33. On peut prendre pour la conique A′ la conique A elle-même; il en résulte que :

Quand une conique B′ *a ses foyers sur une conique* A : *le quadrilatère circonscrit à ces deux courbes est toujours circonscrit à un petit* *cercle dont le centre sphérique est au point de concours des arcs tangents à la conique* A *menés par les foyers de* B′.

34. On conçoit que la considération du cercle imaginaire à l'infini sur la sphère, de laquelle nous venons de faire dériver de nombreuses propriétés des coniques sphériques homofocales, donne lieu à une théorie, également simple et féconde, des *coniques sphériques homocycliques*.

Du reste les propositions dans ces deux théories se correspondent, et l'on passe des unes aux autres sans difficulté, par le seul principe des figures sphériques *supplémentaires*.

SURFACES DU SECOND ORDRE HOMOFOCALES.

Préliminaires.

1. Par la courbe d'intersection de deux surfaces du second ordre passent une infinité d'autres surfaces du même ordre; et au nombre de ces surfaces se trouvent quatre cônes. Le sommet de chaque cône a pour plan polaire, dans toutes les surfaces, le plan des sommets des trois autres cônes.

Cette propriété des surfaces du second ordre a été démontrée en premier lieu par M. Poncelet dans le *Supplément* de son *Traité des propriétés projectives des figures*, et il en a conclu ensuite, par la théorie des polaires réciproques, que la surface développable circonscrite à deux surfaces du second ordre admet quatre sections planes qui sont simplement du second ordre, c'est-à-dire des coniques; et que ces courbes sont situées dans les quatre plans dans lesquels se trouvent aussi, trois à trois, les sommets des quatre cônes qui passent par la courbe d'intersection des deux surfaces [*].

M. Poncelet a appelé ces courbes *lignes de striction* de la développable; parce que ce sont des lignes de pénétration des nappes de cette surface.

---

[*] *Mémoire sur la théorie générale des polaires réciproques*, art. 103; voir *Journal de Mathématiques* de Crelle, t. IV, p. 37, année 1829.

2. On peut inscrire dans la développable circonscrite à deux surfaces du second ordre [*] une infinité d'autres surfaces du même ordre; de même que l'on peut mener par la courbe d'intersection des deux surfaces une infinité d'autres surfaces du même ordre.

Chacune des surfaces inscrites dans une développable est déterminée si l'on donne un plan auquel elle doive être tangente.

Les quatre coniques, lignes de striction de la développable, représentent quatre de ces surfaces, qui se distinguent de toutes les autres, en ce que chacune d'elles a un de ses trois axes principaux nul. Disons que ce sont des surfaces du second ordre infiniment aplaties et limitées par le contour de chaque section conique. C'est ainsi que nous considérons dans la théorie des coniques planes une droite limitée à deux points, et dans la théorie des coniques sphériques un arc de grand cercle limité à deux points, comme représentant une conique, plane ou sphérique, infiniment aplatie.

Une surface du second ordre et une conique, situées d'une manière quelconque dans l'espace, déterminent une développable circonscrite, dans laquelle on peut inscrire une infinité d'autres surfaces du second ordre : cette développable a trois lignes de striction autres que la conique proposée qui forme la quatrième.

De même, deux coniques situées d'une manière quelconque dans l'espace déterminent une développable circonscrite, dans laquelle on peut inscrire une infinité de surfaces du second ordre; cette développable a deux lignes de striction autres que les coniques données.

3. La développable circonscrite à deux surfaces du second ordre peut être imaginaire; ce qui a lieu, par exemple, dans le cas de deux ellipsoïdes dont l'un est renfermé dans l'autre.

Mais, de ce qu'une développable est imaginaire, il ne faut pas en conclure que toutes ses lignes de striction le soient aussi; car il existe une infinité de surfaces du second ordre qu'on peut dire inscrites dans la développable imaginaire; et une ou plusieurs de ces surfaces peu-

---

[*] Cette développable est du huitième ordre; ce que nous avons démontré dans l'*Aperçu historique*, p. 250.

vent se réduire à des coniques, comme dans le cas où la développable est réelle.

Des deux coniques qu'on prend pour lignes de striction, et qui déterminent une développable, une ou toutes les deux peuvent être imaginaires; de même que, des deux cônes qui déterminent une courbe d'intersection (réelle ou imaginaire) par laquelle passent une infinité de surfaces du second ordre, un ou tous les deux peuvent être imaginaires.

4. *Quand deux surfaces du second ordre sont concentriques, leur développable circonscrite a une ligne de striction (réelle ou imaginaire) située à l'infini.*

Car le centre commun des deux surfaces a pour plan polaire dans les deux surfaces le plan situé à l'infini; et dans ce plan se trouve une des quatre lignes de striction de la développable (**1**).

Réciproquement, *quand la développable circonscrite à deux surfaces a une ligne de striction à l'infini, ces surfaces sont concentriques.*

Ce cas est, en particulier, celui des surfaces homofocales, comme on va le voir tout à l'heure.

5. Voici un théorème général fort important auquel il donne lieu :

Quand deux surfaces sont concentriques, si par une droite quelconque L *on mène deux plans conjugués par rapport aux deux surfaces* [*], *ces plans sont parallèles à deux plans diamétraux conjugués d'une même troisième surface du second ordre déterminée d'espèce.*

Cette surface, si on la suppose concentrique aux proposées, a pour cône asymptote, le cône qui a pour sommet le centre commun des surfaces, et pour base la conique, ou ligne de striction, située à l'infini.

Quand la droite L est tangente aux deux surfaces, les deux plans conjugués sont les plans tangents à ces surfaces menés par les points de contact de la droite L.

Cette droite peut être tangente aux deux surfaces en un même point situé sur leur courbe d'intersection; les deux plans conjugués sont les plans tangents en ce point.

---

[*] Nous disons que deux plans sont *conjugués* par rapport à une surface quand le pôle de l'un est situé sur l'autre.

Surfaces homofocales.

6. Considérons la développable circonscrite à une surface du second ordre donnée A et à un cercle imaginaire situé a l'infini. Une infinité d'autres surfaces du second ordre seront inscrites dans cette développable, et toutes les surfaces seront concentriques, puisque la développable a une ligne de striction à l'infini.

Or, d'une part, tout cône ayant pour base un cercle imaginaire situé à l'infini, est, comme nous l'avons vu au sujet des coniques sphériques (art. **3**), *le cône asymptote d'une sphère.*

Et, d'autre part, deux plans diamétraux conjugués d'une sphère sont rectangulaires. D'après cela, le théorème général qui précède donne lieu à celui-ci :

Quand deux surfaces du second ordre A, B *sont telles, que leur développable circonscrite ait pour une de ses lignes de striction un cercle imaginaire situé à l'infini, les deux plans conjugués par rapport aux deux surfaces, que l'on peut mener par une droite quelconque donnée* L, *sont toujours rectangulaires.*

Et en particulier, *les plans tangents aux deux surfaces menés par une même tangente commune quelconque, sont toujours rectangulaires.*

Par conséquent, *les deux surfaces se coupent partout à angle droit.*

7. On reconnaît, à cette dernière propriété, les surfaces *homofocales*. Ainsi un système de surfaces homofocales est simplement un système de surfaces inscrites dans une même développable; système qui ne se distingue de tout autre, qu'en ce que cette développable a pour une de ses lignes de striction un cercle imaginaire situé à l'infini.

Cette définition des surfaces homofocales est la plus concise, la plus nette et la plus féconde. Elle conduit avec une facilité extrême à une foule de propriétés de ces surfaces, que ne pouvait faire soupçonner la définition accoutumée, savoir, que ce sont des surfaces dont les sections principales sont décrites des mêmes foyers. Une des plus importantes de ces propriétés est, sans nul doute, celle qu'exprime le théorème précédent [*].

[*] On en conclut notamment cette belle propriété que, *de quelque point de l'espace*

8. On sait que ce système de surfaces, qu'on a appelées depuis *homofocales*, a été considéré en premier lieu par M. Ch. Dupin, et qu'il tient une grande place dans le savant ouvrage qui a tant contribué, par les recherches neuves et importantes qu'il renferme et par la facilité des démonstrations, à répandre le goût des doctrines de la pure géométrie [*]. L'illustre auteur, que des considérations plus générales sur les lignes de courbure des surfaces d'ordre quelconque conduisaient à l'étude particulière de ce système de surfaces du second ordre, a bien reconnu que les deux sections coniques, ellipse et hyperbole qui figurent dans ce système, sont les limites des séries d'ellipsoïdes et d'hyperboloïdes à une et à deux nappes; que ce sont des surfaces infiniment aplaties, parce qu'un de leurs axes principaux est devenu nul [**].

Mais c'est à un autre point de vue que ces mêmes courbes nous représentent des surfaces limites infiniment aplaties, quand nous les considérons dans la développable circonscrite à toutes les surfaces, sur laquelle elles forment deux lignes de striction.

Ces courbes sont situées dans deux plans principaux des surfaces; une troisième, imaginaire, est située dans le troisième plan principal. Ces trois courbes et le cercle imaginaire situé à l'infini forment les quatre lignes de striction de la développable.

On ne peut parler des surfaces homofocales sans penser aux deux

---

que l'on considère deux surfaces homofocales, leurs contours apparents paraissent se couper à angle droit. D'où il résulte, d'après la théorie de Monge, *que ces deux surfaces forment les deux nappes lieux des centres de courbure d'une certaine surface unique* (voir *Aperçu historique*, p. 392). Premier exemple, et peut-être le seul jusqu'ici, de deux nappes ou surfaces que l'on reconnaît comme étant le lieu des centres de courbure d'une autre surface. Cette propriété des deux surfaces homofocales conduit naturellement, d'après la théorie même de Monge, à la considération des lignes géodésiques sur les surfaces du second ordre.

M. Liouville a donné l'équation différentielle de la surface, ou plutôt des surfaces parallèles qui ont leurs centres de courbure sur deux surfaces homofocales (voir *Journal de Mathématiques*, t. XVI, p. 6; année 1851).

[*] *Développements de Géométrie, etc.* Paris, 1813; in-4°.

[**] M. Binet est parvenu à des résultats semblables, dans un beau Mémoire de Géométrie et de Mécanique, sur la *Théorie des axes conjugués et des moments d'inertie des corps* (voir *Journal de l'École Polytechnique*, t. IX; 16e cahier, p. 41; année 1813).

célèbres théorèmes de Maclaurin et d'Ivory sur l'attraction des ellipsoïdes, et surtout aux belles recherches de M. Lamé sur la théorie de la chaleur, dans lesquelles ce système de surfaces orthogonales trouve les applications les plus heureuses dans l'étude des phénomènes physiques, comme dans les théories analytiques les plus relevées.

9. Mais on n'avait point encore étudié d'une manière spéciale les propriétés géométriques de ces surfaces, quand j'en ai fait le sujet d'un travail étendu, dont les résultats principaux se trouvent dans une des Notes de l'*Aperçu historique* (Note XXXI, p. 384-399 et p. 556).

Je me suis attaché alors à considérer ces surfaces comme formant la théorie qui, dans la géométrie à trois dimensions, correspond à celle des coniques homofocales sur le plan ou sur la sphère. Et à raison de cette analogie, d'après laquelle chacune des deux lignes de striction réelles dont il vient d'être question correspond à l'ensemble des deux foyers d'une conique, j'ai appelé ces courbes, les coniques *focales*, ou *excentriques* des surfaces du système. De très-nombreuses propositions ont constaté l'analogie ainsi entendue.

C'est dans ce même travail que se trouve pour la première fois cette propriété des surfaces homofocales, *d'être toutes inscrites dans une même développable;* propriété qui est la base d'une foule de conséquences.

10. Depuis, la question des lignes géodésiques sur l'ellipsoïde m'a donné lieu de reconnaître que ces surfaces homofocales sont aussi importantes dans l'étude de ces lignes, qu'elles l'ont été dans la question des lignes de courbure. Il nous suffira de rappeler ici cette propriété fondamentale, que : *les tangentes à une ligne géodésique tracée sur une surface du second ordre sont toutes tangentes à une autre surface, homofocale à la première*. Et par suite, *les plans osculateurs de la ligne géodésique sont eux-mêmes tangents à la seconde surface* [*].

11. L'objet de la présente communication est de présenter un ensemble de propriétés des surfaces homofocales déduites immédiate-

[*] Voir *Comptes rendus,* t. XXII, année 1846; p. 63-72, 107-111, 313-318, 517-521.

ment de la considération du cercle imaginaire situé à l'infini, c'est-à-dire de ce cercle qui forme une des lignes de striction de la développable (imaginaire) circonscrite aux surfaces, et qui constitue le caractère propre et essentiel de cette développable.

Ces propriétés sont très-nombreuses; mais nous les comprendrons, comme nous avons fait pour les coniques sphériques, sous quatre théorèmes généraux, desquels il suffira de déduire les principales conséquences particulières.

Et quant à ces quatre théorèmes généraux, ils offrent un exemple bien remarquable de l'enchaînement qui existe entre toutes les parties d'une théorie, et de la possibilité souvent de les ramener toutes à un principe unique et très-simple : car ces théorèmes, quoique différents, se tirent d'une même proposition fondamentale concernant des surfaces d'un ordre quelconque. Voici l'énoncé de cette proposition, appliquée à des surfaces du second ordre :

Théorème fondamental. — *Quand quatre surfaces du second ordre* A, A′, B, B′ *sont telles, que les deux développables circonscrites à ces surfaces prises deux à deux, soient circonscrites à une même autre surface du second ordre : il en sera de même des deux développables circonscrites aux surfaces* A, A′, B, B′ *prises deux à deux d'une autre manière.*

Par exemple, si les développables $\boxed{AB}$, $\boxed{A'B'}$ sont circonscrites à une même surface U, les développables $\boxed{AA'}$, $\boxed{BB'}$ seront aussi circonscrites à une même surface.

Quatre théorèmes généraux sur les surfaces homofocales.

12. Théorème I. — *Etant données deux surfaces homofocales* A, A′ *et une autre surface quelconque* U ; *si dans les deux développables* $\boxed{UA}$, $\boxed{UA'}$ *on inscrit deux surfaces quelconques* B, B′ : *la développable* $\boxed{BB'}$ *sera circonscrite tout à la fois à une surface homofocale à* A *et* A′, *et à une surface homofocale à* U.

La première partie de cet énoncé est une application immédiate du théorème précédent.

Quant à la seconde partie, appelons C_i le cercle imaginaire situé à l'infini, que nous considérerons comme une surface du second ordre inscrite dans la développable $\boxed{AA'}$. Les deux développables $\boxed{UB}$ et $\boxed{A'C_i}$ sont circonscrites à une même surface A. Donc les développables $\boxed{BC_i}$ et $\boxed{UA'}$ ou $\boxed{UB'}$, qui est la même que $\boxed{UA'}$, sont circonscrites à une même surface (d'après le théorème fondamental). Et par suite (en vertu du même théorème), les deux développables $\boxed{BB'}$ et $\boxed{UC_i}$ sont circonscrites à une même surface. Mais toute surface inscrite dans la développable $\boxed{UC_i}$ est une surface homofocale à U (**7**). Le théorème est donc démontré.

13. THÉORÈME II. — *Etant données deux surfaces homofocales* A, A' *et une troisième surface quelconque* U, *si dans la développable* $\boxed{UA}$ *on inscrit une surface* B : *on pourra inscrire dans la développable* $\boxed{UA'}$ *une surface* B' *homofocale à* B.

En effet, les deux développables $\boxed{UB}$ et $\boxed{A'C_i}$ sont circonscrites à la même surface A. Donc les deux développables $\boxed{UA'}$ et $\boxed{BC_i}$ sont circonscrites à une même surface. Mais toutes les surfaces inscrites dans la développable $\boxed{BC_i}$ sont homofocales à B (**7**); donc on peut inscrire dans la surface $\boxed{UA'}$ une surface homofocale à B.

C. Q. F. D.

14. THÉORÈME III. — *Etant données trois surfaces homofocales* A, A', A'' *et une quatrième surface quelconque* U ; *si dans les développables* $\boxed{UA}$, $\boxed{UA'}$ *on inscrit deux surfaces* B, B' : *les deux développables* $\boxed{UA''}$ et $\boxed{BB'}$ *seront circonscrites à une même surface* B''.

En effet, les deux développables $\boxed{\mathrm{UB}}$, $\boxed{\mathrm{A'A''}}$ sont circonscrites à une même surface A. Donc les deux développables $\boxed{\mathrm{BA''}}$ et $\boxed{\mathrm{UA'}}$ ou $\boxed{\mathrm{UB'}}$ sont circonscrites à une même surface. Donc les deux développables $\boxed{\mathrm{UA''}}$ et $\boxed{\mathrm{BB'}}$ sont circonscrites à une même développable.

C. Q. F. D.

15. Théorème IV. — *Quand trois surfaces quelconques* A, B, C *sont inscrites dans une même développable, si l'on décrit deux surfaces* A', B' *homofocales à* A *et à* B, *respectivement : on pourra inscrire dans la développable* $\boxed{\mathrm{A'B'}}$ *une surface homofocale à* C;

Et les deux développables $\boxed{\mathrm{ABC}}$, $\boxed{\mathrm{A'B'C'}}$ *seront circonscrites à une même surface* (du second ordre).

En effet, les deux développables $\boxed{\mathrm{BC}}$, $\boxed{\mathrm{A'C}_i}$ sont circonscrites à une même surface A; donc les deux développables $\boxed{\mathrm{CA'}}$ et $\boxed{\mathrm{BC}_i}$ ou $\boxed{\mathrm{B'C}_i}$ sont aussi circonscrites à une même surface, et par conséquent aussi les deux développables $\boxed{\mathrm{CC}_i}$ et $\boxed{\mathrm{A'B'}}$. Or toute surface inscrite dans la développable $\boxed{\mathrm{CC}_i}$ est homofocale à C. Donc la développable $\boxed{\mathrm{A'B'}}$ est circonscrite à une surface homofocale à C : ce qui démontre la première partie du théorème.

Quant à la seconde partie, il suffit de remarquer que les deux développables $\boxed{\mathrm{AA'}}$ et $\boxed{\mathrm{BB'}}$ sont circonscrites à la surface C_i; car il en résulte que les deux développables $\boxed{\mathrm{AB}}$ et $\boxed{\mathrm{A'B'}}$ sont aussi circonscrites à une même surface. Donc, etc.

Conséquences du théorème I.

16. La surface U est une conique :

Étant données deux surfaces homofocales A, A′ *et une conique* U *quelconque; si dans les développables* $\boxed{\mathrm{UA}}$, $\boxed{\mathrm{UA'}}$ *on inscrit deux surfaces* B, B′ : *la développable* $\boxed{\mathrm{BB'}}$ *sera circonscrite tout à la fois à une surface homofocale à* A *et* A′, *et à une surface qui aura pour focale la conique* U.

17. La conique U peut être infiniment aplatie et se réduire à une droite limitée à deux points u, u_1 :

Étant données deux surfaces homofocales A, A′; *si l'on circonscrit à chacune d'elles deux cônes ayant pour sommets deux points donnés* u, u_1, *et que dans les deux cônes circonscrits à* A *on inscrive une surface* B, *et dans les deux cônes circonscrits à* A′ *une surface* B′ : *la développable* $\boxed{\mathrm{BB'}}$ *sera circonscrite à une surface homofocale à* A *et* A′, *et à une surface de révolution ayant pour foyers les deux points* u, u_1.

On peut prendre pour les surfaces A, A′ les deux focales d'une même surface.

18. Si la surface U est une sphère infiniment petite, ou réduite à un point :

Étant données deux surfaces homofocales A, A′; *si on leur circonscrit deux cônes ayant leurs sommets en un même point* u *de l'espace, et que l'on conçoive deux surfaces* B, B′ *inscrites aux deux surfaces* A, A′, *respectivement, suivant toute l'étendue des courbes de contact des deux cônes : la développable* $\boxed{\mathrm{BB'}}$ *sera circonscrite à une surface homofocale à* A *et* A′, *et à une sphère ayant son centre au point* u.

19. On peut prendre pour les deux surfaces B, B′ les courbes de contact des deux cônes. Ainsi :

Étant données deux surfaces homofocales A, A′; *si on leur circonscrit deux cônes ayant le même sommet : la développable circonscrite aux deux courbes de contact sera circonscrite à une surface homofocale aux proposées, et à une sphère ayant son centre au sommet commun des deux cônes.*

20. La surface U est inscrite à la surface A suivant une conique, et l'on prend pour la surface B le pôle de contact des deux surfaces.

Étant données deux surfaces homofocales A, A' *et une surface* U *inscrite à* A *suivant une conique; si dans la développable* $\boxed{\mathrm{UA}'}$ *on inscrit une surface* B', *et que le pôle de contact des deux surfaces* U *et* A *soit pris pour le sommet d'un cône circonscrit à cette surface* B' : *la courbe de contact sera sur deux surfaces tangentes à* B' *suivant cette courbe, et dont l'une sera homofocale à* A *et* A', *et l'autre sera homofocale à la surface* U.

21. On peut prendre pour la surface B' une ligne de striction de la développable $\boxed{\mathrm{UA}'}$. Donc :

Étant données deux surfaces homofocales A, A' *et une surface* U *inscrite dans* A : *chaque ligne de striction de la développable* $\boxed{\mathrm{UA}'}$ *est tout à la fois sur une surface homofocale à* A *et* A', *et sur une surface homofocale à* U; *et ces deux surfaces sont inscrites dans le cône qui a pour base la ligne de striction et pour sommet celui du cône circonscrit à* U *et à* A *suivant leur courbe de contact.*

22. On prend pour la surface U dans le théorème **20** une conique tracée sur la surface A :

Étant données deux surfaces homofocales A, A', *et sur la première une section plane* U ; *si dans la développable* $\boxed{\mathrm{UA}'}$ *on inscrit une surface* B', *et que le sommet du cône circonscrit à* A *suivant la courbe* U, *soit pris pour le sommet d'un cône circonscrit à cette surface* B' : *la courbe de contact sera sur deux surfaces inscrites ou circonscrites à ce cône suivant cette courbe, et dont la première sera homofocale à* A *et* A', *et la deuxième aura pour focale la conique* U.

On peut prendre pour B' une des lignes de striction de la développable $\boxed{\mathrm{UA}'}$ comme dans le théorème **21**.

23. Quand la surface U est une sphère, on peut la considérer comme circonscrite au cercle imaginaire situé à l'infini, et prendre celui-ci pour la surface A; une surface B inscrite dans la développable $\boxed{\mathrm{UA}}$ sera une sphère concentrique à U.

D'après cela, le théorème I donne lieu au suivant :

Etant données deux sphères concentriques U, B *et une surface quelconque* A'; *si l'on inscrit dans la développable* $\boxed{\mathrm{UA'}}$ *une surface* B' : *la développable* $\boxed{\mathrm{BB'}}$ *sera circonscrite à une surface homofocale à* A'.

24. On peut prendre pour la sphère B le centre de U. Donc :

Étant données une sphère U *et une surface* A', *si l'on inscrit dans la développable* $\boxed{\mathrm{UA'}}$ *une surface* B', *et qu'on circonscrive à cette surface un cône qui ait son sommet au centre de la sphère* U : *la courbe de contact sera sur une surface homofocale à* A' *et tangente au cône suivant cette courbe.*

25. Qu'on prenne pour la surface B' une ligne de striction de la développable $\boxed{\mathrm{UA'}}$; on en conclut que :

Quand une développable est circonscrite à une sphère et à une surface A' : *chacune de ses lignes de striction est située sur une surface homofocale à* A', *et le cône circonscrit à cette surface suivant cette courbe a son sommet au centre de la sphère.*

26. La surface U se réduit à une droite inscrite à la surface A, c'est-à-dire limitée à deux points u, u_1 de cette surface; alors la développable $\boxed{\mathrm{UA}}$ est formée des plans tangents à A en ces deux points u, u_1. Si l'on prend pour la surface B la droite d'intersection de ces plans, il en résulte ce théorème :

Etant données deux surfaces homofocales A, A'; *et deux points* u, u_1 *de la première étant pris pour les sommets de deux cônes circonscrits* *à* A′ ; *si l'on inscrit dans ces deux cônes une surface quelconque* B′, *et que par la droite d'intersection des plans tangents à* A *en ses points* u, u_1, *on mène deux plans tangents à cette surface* B′ : *les deux points de contact seront sur deux surfaces tangentes en ces points aux deux plans, et dont la première sera homofocale à* A *et* A′, *et la seconde aura pour foyers les deux points* u, u_1.

On peut prendre pour la surface B′ une des deux coniques suivant lesquelles se coupent les deux cônes.

Conséquences du théorème II.

27. La surface U est infiniment aplatie et devient une conique :

Etant données deux surfaces homofocales A, A′ *et une conique* U ; *si dans la développable* $\boxed{\text{UA}}$ *on inscrit une surface* B : *on pourra inscrire dans la développable* $\boxed{\text{UA}'}$ *une surface homofocale à* B.

28. La conique U se réduit à une droite limitée à deux points u, u_1 :

Etant données deux surfaces homofocales A, A′, *à chacune desquelles on circonscrit deux cônes ayant leurs sommets en deux points donnés* u, u_1 ; *si dans les deux cônes circonscrits à la première surface on inscrit une surface* B : *on pourra inscrire dans les deux cônes circonscrits à la seconde surface une surface* B′ *homofocale à* B.

29. Si les deux points u, u_1 s'approchent indéfiniment et coïncident, on en conclut que :

Etant données deux surfaces homofocales A, A′, *auxquelles on circonscrit deux cônes ayant le même sommet ; si l'on inscrit à la première une surface* B *suivant la courbe de contact du premier cône : on pourra inscrire à la seconde, suivant la courbe de contact du second cône, une surface* B′ *homofocale à* B.

30. Qu'on prenne pour la surface A une focale de A′ ; et pour le sommet des cônes un point du plan de cette courbe : on obtient ce théorème :

Etant données une surface A′ *et une de ses focales* A; *si l'on décrit une conique* B *qui ait deux points de contact avec cette conique* A : *on pourra inscrire dans la surface* A′ *une surface* B′ *ayant pour focale la conique* B; *le sommet du cône circonscrit à* A′ *et* B′ *suivant leur courbe de contact sera le point de rencontre des tangentes aux coniques* A, B *en leurs points de contact.*

31. On peut prendre pour la conique B une corde de la focale A; alors on dira que :

Etant données une surface A′ *et une de ses focales* A : *deux points de cette courbe sont les foyers d'une surface de révolution inscrite dans la surface* A′; *et le sommet du cône circonscrit à ces surfaces suivant leur courbe de contact est le point de concours des tangentes à la conique* A *menées par les deux points pris sur cette courbe* [*].

32. On peut prendre pour la surface B, dans le théorème **29**, la courbe de contact du premier cône; il en résulte que :

Etant données deux surfaces homofocales A, A′; *si on leur circonscrit deux cônes ayant le même sommet : la courbe de contact de la surface* A *sera la focale d'une surface inscrite dans* A′ *suivant la courbe de contact de celle-ci.*

33. La surface U est circonscrite à la surface A, et on prend pour B le pôle de contact. Il en résulte que :

Etant données deux surfaces homofocales A, A′ *et une surface* U *inscrite dans la surface* A : *la développable* $\boxed{\mathrm{UA'}}$ *est circonscrite à une sphère qui a son centre au pôle de contact des deux surfaces* A *et* U.

34. La surface U peut être une conique tracée sur la surface A; donc :

Etant données deux surfaces homofocales A, A′ *et une conique* U

[*] J'ai eu occasion d'énoncer ce théorème dans une communication à l'Académie, déjà ancienne (voir *Comptes rendus*, t. XVI, p. 1108; année 1843).

tracée sur A : *la développable* $\boxed{\mathrm{UA}'}$ *est circonscrite à une sphère qui a son centre au sommet du cône circonscrit à* A *suivant la conique* U.

Cet énoncé n'est au fond qu'une réciproque du théorème **25**.

Conséquences du théorème III.

35. Supposons que la surface U se réduise à un point :

Etant données trois surfaces homofocales A, A′, A″; *si on leur circonscrit trois cônes ayant le même sommet, et que par les courbes de contact des deux premières* A, A′ *on mène deux autres surfaces* B, B′ *inscrites aux deux cônes respectifs : on pourra inscrire dans la développable* $\boxed{\mathrm{BB}'}$ *une surface tangente à* A″ *suivant la courbe de contact du cône circonscrit à cette surface.*

On peut prendre pour les deux surfaces B, B′ les courbes de contact des cônes circonscrits aux deux surfaces A, A′.

Si l'on suppose que la surface A″ soit le cercle imaginaire situé à l'infini, on retrouve la seconde partie du théorème I.

Conséquences du théorème IV.

36. On peut prendre pour les surfaces A′, B′ des coniques focales des deux surfaces A et B; donc

Etant données trois surfaces A, B, C *inscrites dans une même développable; si l'on conçoit la développable circonscrite à deux des coniques focales des surfaces* A *et* B *respectivement : cette développable sera circonscrite à une surface homofocale à* C, *et à une surface inscrite dans la développable* $\boxed{\mathrm{ABC}}$.

37. Si la surface C est une sphère, il s'ensuit que :

Quand deux surfaces A, B *sont inscrites dans une développable circonscrite à une sphère* C; *si l'on conçoit deux surfaces* A′, B′ *homofo-*

cales à ces surfaces, une à une respectivement : la développable $\boxed{A'B'}$ *sera circonscrite à une sphère concentrique à* C;

Et les deux développables $\boxed{AB}$, $\boxed{A'B'}$ *seront circonscrites à une même surface.*

38. On peut supposer, comme ci-dessus (**36**), que les surfaces A', B' soient des focales des deux surfaces A, B. Donc

Quand deux surfaces A, B *sont inscrites dans une développable circonscrite à une sphère : la développable circonscrite à deux focales de ces surfaces est circonscrite à une deuxième sphère concentrique à la première;*

Et les deux développables sont circonscrites à une même surface.

39. Si les deux surfaces A, B sont circonscrites l'une à l'autre, on peut prendre pour la surface C, soit leur pôle de contact, soit leur courbe de contact; il en résulte ce théorème :

Quand deux surfaces A, B *sont circonscrites l'une à l'autre suivant une conique, si l'on décrit deux autres surfaces* A', B' *qui leur soient homofocales, une à une respectivement : la développable* $\boxed{A'B'}$ *sera circonscrite tout à la fois à trois surfaces; premièrement à une sphère ayant son centre au pôle de contact des deux surfaces* A *et* B; *secondement à une surface ayant pour focale la courbe de contact de ces deux surfaces* A *et* B; *et troisièmement à une surface circonscrite à ces deux mêmes* A *et* B *suivant leur courbe de contact.*

40. Que l'on prenne pour la surface B une conique tracée sur la surface A; il en résulte ce théorème :

Quand on a deux surfaces homofocales A, A', *et une conique* B *tracée sur la première* A; *si l'on décrit une surface* B' *qui ait cette conique pour focale : la développable* $\boxed{A'B'}$ *sera circonscrite à une sphère ayant* *son centre au sommet du cône circonscrit à* A *suivant la conique* B; *et à une surface tangente à* A *suivant cette même conique* B.

41. On peut prendre pour la surface A′, dans ce théorème, la surface A; il en résulte que :

Quand une conique B *tracée sur une surface* A *est prise pour la focale d'une autre surface quelconque* B′, *la développable circonscrite aux deux surfaces* A *et* B′ *est circonscrite à une sphère qui a son centre au sommet du cône circonscrit à* A *suivant la conique* B.