JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

Théorème concernant les nombres premiers de la forme $40\mu + 7$

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 5 (1860), p. 389-390.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1860_2_5__389_0>

THÉORÈME

CONCERNANT LES NOMBRES PREMIERS DE LA FORME $40\mu + 7$;

Par M. J. LIOUVILLE.

Pour tout nombre premier m, de la forme $40\mu + 7$, on peut poser (un nombre impair de fois) l'équation

$$m = (10x + 1)^2 + 2p^{4l+1}y^2,$$

x étant un entier indifféremment positif, nul ou négatif, d'ailleurs pair ou impair, tandis que y est impair et positif : quant à p, c'est un nombre premier ($20\nu + 3$ ou $20\nu + 7$) qui ne divise pas y.

L'expression $(10x + 1)^2$, en y prenant x positif, nul ou négatif, donne les carrés des nombres positifs de ces deux formes

$$10s + 1, \quad 10s - 1,$$

savoir

$$1^2, \ 9^2, \ 11^2, \ 19^2, \ 21^2, \ldots;$$

notre théorème revient donc à dire qu'il y a un nombre impair des termes de la suite

$$m - 1^2, \quad m - 9^2, \quad m - 11^2, \quad m - 19^2, \quad m - 21^2, \ldots,$$

qu'on peut exprimer par

$$2p^{4l+1}y^2,$$

p étant un nombre premier non diviseur de y. La forme ($20\nu + 3$ ou $20\nu + 7$), que nous attribuons à p, n'est qu'une conséquence de l'équation même que nous posons,

$$m = (10x + 1)^2 + 2p^{4l+1}y^2,$$

et de la forme linéaire de m, qui est $40\mu + 7$.

Le plus petit nombre de la forme $40\mu + 7$ est 7; c'est un nombre premier : or on a

$$7 = 1^2 + 2.3.1^2,$$

conformément à notre théorème. Ensuite vient

$$47 = 1^2 + 2.23.1^2.$$

Quant à 87, qui répond à $\mu = 2$, ce n'est pas un nombre premier; mais pour $\mu = 3$, on a 127 qui offre ces trois formes canoniques :

$$1^2 + 2.7.3^2, \quad 9^2 + 2.33.1^2, \quad 11^2 + 2.3.1^2.$$

Pour $\mu = 4$, on a 167, et 167 offre aussi trois décompositions du genre exigé :

$$1^2 + 2.83.1^2, \quad 9^2 + 2\,43.1^2, \quad 11^2 + 2.23.1^2.$$

Comme dernier exemple, je prends 367, je trouve l'équation

$$367 = 19^2 + 2.3.1^2;$$

et cette fois encore notre théorème est vérifié.